Geschrieben von Xuan Baldauf <xuan--analysis-skript--sem02@studium.baldauf.org>

Datum: 08.04.2003

Analysis für Informatiker 1

gelesen von Thomas Kühn

Heute gehalten durch Ugur Abdulla.

Es gibt einige Zahlenmengen, z.B.
- die natürlichen Zahlen: $\mathbb{N}=\{,2,\ldots,n,\ldots\}$
- die ganzen Zahlen: $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$
- die rationalen Zahlen: $\left\{\frac{p}{q}\middle|(p,q\in\mathbb{Z})\wedge(q\neq 0)\right\}$

Diese Zahlen lassen sich auf einer Zahlengeraden darstellen.
[Grafik Zahlengeraden]
Aber auf dieser Geraden gibt es viele Lücken.

Beispiel

Man betrachte ein Quadrat mit der Kantenlänge 1.
[Grafik]
Wie lang ist die Diagonale dieses Quadrats? Wir wissen, dass $x^2=2$.

Ich nehme an, dass x eine rationale Zahl sei, also $\exists(p,q\in\mathbb{Z}):\left(x=\frac{p}{q}\right)$

Dann müsste gelten:
$p^2=2\cdot q^2$
$\Rightarrow p^2$ ist gerade
$\Rightarrow p$ ist gerade
$\Rightarrow\exists(m):(p=2\cdot m)$
$\Rightarrow q^2=2\cdot m^2$
$\Rightarrow q$ ist gerade
Dies darf jedoch nicht sein.

Definition: reelle Zahlen

Eine Menge $(\mathbb{R},+,\cdot)$ mit zwei Operationen nennt man reelle Zahlenmenge, wenn folgende Axiome gelten:
1. Kommutativität:
   1. $\forall(a,b\in\mathbb{R}):(a+b=b+a)$
   2. $\forall(a,b\in\mathbb{R}):(a\cdot b+b\cdot a)$
2. Assoziativität

   1. $\forall(a,b,c\in\mathbb{R}):(a+(b+c)=(a+b)+c)$
   2. $\forall(a,b,c\in\mathbb{R}):(a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c)$
3. Distributivität
   1. $\forall(a,b,c\in\mathbb{R}):(a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c)$
4.
   1. $(0\in\mathbb{R})\wedge(1\in\mathbb{R})\wedge(0\neq 1)$
   2. $\forall(a\in\mathbb{R}):(a+0=a)$
   3. $\forall(a\in\mathbb{R}):(a\cdot 1=a)$
5.
   1. $\forall(a\in\mathbb{R}):\exists((-a)\in\mathbb{R}):(a+(-a)=0)$
   2. $\forall(a\in\mathbb{R}):((a\neq 0)\Leftrightarrow(\exists(a^{-1}\in\mathbb{R}):(a\cdot a^{-1}=1)))$

Ordnungsaxiome

1. Trichotomiegesetz: $\forall(a,b\in\mathbb{R}):((a<b) \text{ XOR } (a=b) \text{ XOR } (a>b))$ (nicht „Dichotomie?“)
2.
   1. $\forall(a,b\in\mathbb{R}):((a<b)\Rightarrow(\forall(c\in\mathbb{R}):(a+c<b+c)))$
   2. $\forall(a,b\in\mathbb{R}):((a<b)\Rightarrow(\forall(c\in\mathbb{R}):((c>0)\Rightarrow(a\cdot c<b\cdot c))))$
3. Vollständigkeitsaxiom: Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Definition: induktive Teilmenge

Eine Teilmenge $M\subseteq\mathbb{R}$ heißt induktiv, wenn sie folgende Eigenschaft hat:
1. $1\in M$ (1 ist Einheitselement)
2. $(\exists(a):(a\in M))\Rightarrow((a+1)\in M)$

Beispiele für induktive Teilmengen

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^+$
- $\mathbb{N}$
  - $\mathbb{N}=\bigcap_{\substack{M\subseteq\mathbb{R}\\ M \text{ ist induktiv}}}(M)$: $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge

Induktionsbeweise

Definition: Vollständige Induktion

Es existiere eine Aussage $A(1)$. Wenn für alle Aussagen $A(n)$ gilt, dass, $A(n)\Rightarrow A(n+1)$, dann heißt diese Aussagen-Kette **vollständige Induktion**.

Satz

Sei $M=\{n\in\mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist richtig}\}$. Dann gilt:

- $M \in \mathbb{N}$
- M ist induktiv

Daraus folgt aber:

- $\mathbb{N} \subseteq M$

Das bedeutet aber: $M = \mathbb{N}$

Das heißt, dass die Aussage $A(n)$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Sei meine Aussage: $A(n) = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n > n^2\}$.

Induktionsanfang

Im Falle $A(5)$ muss also gelten: $2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$. Dies stimmt offensichtlich.

Induktionsschritt

Vorraussetzung: Es gelte $A(n)$, also $2^n > n^2$.
Behauptung: $A(n+1)$, also $2^{n+1} > (n+1)^2$
Beweis: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2$

$$2 \cdot n^2 \overset{?}{\geqslant} (n+1)^2$$

$$2 \overset{?}{\geqslant} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$(n \geqslant 5) \Rightarrow \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} < 2\right)$$

Definition: Betrag

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann definiere ich den Betrag wie folgt: $|x| = \begin{cases} x & \forall (x \geqslant 0) \\ -x & \forall (x < 0) \end{cases} = max(x, -x)$

Eigenschaften

1.
   1. $|x| > 0$
   2. $(|x| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$
2. $\forall (\lambda, x \in \mathbb{R}) : (|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|)$
3. $\forall (x, y \in \mathbb{R}) : (|x + y| \leqslant |x| + |y|)$
4. $\forall (x, y \in \mathbb{R}) : (||x| - |y|| \leqslant |x - y|)$
   Beweis:
   1. $\forall (x, y \in \mathbb{R}) : (|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|)$
   2. $((|x| - |y| \leqslant |x - y|) \wedge (|y| - |x| \leqslant |x - y|)) \Rightarrow (||x| - |y|| \leqslant |x - y|)$
5. $\forall (x, y \in \mathbb{R}) : ((|x| \leqslant y) \Rightarrow (-y \leqslant x \leqslant y))$

Manchmal sind Fallunterscheidungen bei Aussagen mit Betragsfunktionen notwendig:

Beispiel

Zu lösen sei die Aussage: $|x|+|3-x|\leqslant 5$

1. Wenn $x\leqslant 0$, dann gilt:

   $-x+3-x\leqslant 5$

   $\Rightarrow 2\cdot x\geqslant -2$

   $\Rightarrow x\geqslant -1$

   $\Rightarrow x\in[-1,0]$

2. Wenn $0<x<3$, dann gilt:

   $x+3-x\leqslant 5$

   $\Rightarrow 3\leqslant 5$

   $\Rightarrow x\in]0,3[$

3. Wenn $x\geqslant 3$. Dann gilt:

   $x+x-3\leqslant 5$

   $\Rightarrow 2\cdot x\leqslant 8$

   $\Rightarrow x\leqslant 4$

   3,4

   $\Rightarrow x\in$ ¿

Damit ist die Lösungsmenge $L=[-1,0]\cup]0,3[\cup[3,4]=[-1,4]$.

Beispiel für Induktionsbeweis

Behauptung: $\sum_{k=1}^{n}(k^3)=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$.

Induktionsanfang

Für $n=1$ ist die Aussage trivial.

Induktionsschritt

Es gelte die Aussage für ein gegebenes n .

Behauptung:
$$\sum_{k=1}^{n+1}(k^3)=\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2$$

Beweis:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(k^3)&=\sum_{k=1}^{n}(k^3)+(n+1)^3\\&=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3\\&=(n+1)^2\cdot\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)\\&=\frac{(n+1)^2\cdot(n^2+4\cdot n+4)}{4}\\&=\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Beispiel für Induktionsbeweis

(noch ein Beispiel)
Es gelte:

$$\forall(k,n\in\mathbb{N}):\left(\left(0\leqslant k\leqslant n\right)\Rightarrow\left(\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}=\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{n-j+1}{j}\right)\right)\right)$$

Weiterhin definiere ich $0!=1$

Behauptung: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}&=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}\\&=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}\cdot(k+1+n-k)\\&=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}\cdot(1+n)\\&=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}\cdot(n+1-k-1)\\&=\binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

[...hier fehlt vielleicht etwas...]

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)\cdot a^{j}\cdot b^{n+1-j}\right)+a^{n+1}+b^{n+1}=\sum_{j=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{j}\cdot a^{j}\cdot b^{n+1-j}\right)$$

Beispiel für Induktionsbeweis

(noch einer)

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=(a+b)\cdot(a+b)^{n}\\&=(a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\cdot a^{k}\cdot b^{n-k}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\cdot a^{k+1}\cdot b^{n-k}\right)+\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\cdot a^{k}\cdot b^{n-k+1}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n+1}\left(\binom{n}{j-1}\cdot a^{j}\cdot b^{n-j+1}\right)+\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\cdot a^{j}\cdot b^{n-j+1}\right)\end{aligned}$$

Datum: 10.04.2003

Heute gehalten durch Ugur Abdulla.
[Tafelbild]

Beispiel für Induktionsbeweis

$$\forall (a, b \in \mathbb{R}) : \forall (n \in \mathbb{N}) : \left((a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \right) \right), \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\forall (0 \leqslant k \leqslant n) : \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \right)$$

Intuitive Erklärung

n\k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Beispiel für Induktionsbeweis

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Beispiel für Induktionsbeweis

$$\forall (n \in \mathbb{N}) : \left((x \geqslant -1) \Rightarrow \left((1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \right) \right)$$

Sei Aussage $A(n) = \left((1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \right)$

Indunktionsanfang

Aussage $A(1) = (1 + x = 1 + x)$

$\Rightarrow A(1) = \text{wahr}$

Indunktionsschritt

Aus Aussage $A(n)$ schließen wir auf $A(n+1)$

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \\
&\geqslant (1+x) \cdot (1 + n \cdot x) \\
&= 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2 \\
&\geqslant 1 + (n+1) \cdot x
\end{aligned}$$

Schranken

Definition: obere Schranke

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke** von M, wenn $\forall (x \in M) : (x \leqslant c)$

Definition: untere Schranke

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt **untere Schranke** von M, wenn $\forall (x \in M) : (x \geqslant c)$

Definition: nach oben beschränkt

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Die Menge M heißt **nach oben beschränkt**, wenn es für M eine obere Schranke gibt.

Definition: nach unten beschränkt

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Die Menge M heißt **nach unten beschränkt**, wenn es für M eine untere Schranke gibt.

Definition: Supremum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum** von M (geschrieben als $\sup(M)$), wenn c die kleinste obere Schranke von M ist.

Eigenschaften

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $c = \sup(M)$. Dann muss gelten:
1. $\forall (x \in M) : (x \leqslant c)$
2. $\forall (\epsilon > 0) : \exists (x \in M) : (x > c - \epsilon)$

Definition: Infimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt **Infimum** von M (geschrieben als $\inf(M)$), wenn c die größte untere Schranke von M ist.

Eigenschaften

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $c = \inf(M)$. Dann muss gelten:
3. $\forall (x \in M) : (x \geqslant c)$
4. $\forall (\epsilon > 0) : \exists (x \in M) : (x < c + \epsilon)$

Definition: Maximum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn $\sup(M) \in M$, dann heißt $\sup(M)$ **Maximum** von M (geschrieben als $\max(M)$).

Definition: Minimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn $\inf(M) \in M$, dann heißt $\sup(M)$ **Maximum** von M (geschrieben als $\max(M)$).

Definition: beschränkt

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Die Menge M heißt **beschränkt**, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist. Dies ist gleichbedeutend mit dem Fall $\exists (c \in \mathbb{R}) : \forall (x \in M) : (|x| \leqslant c)$.

Bedeutung der Axiome der reellen Zahlen

Eine Menge, die die Axiome der Menge der reellen Zahlen erfüllt, ist isomorph zu den reellen Zahlen. Mengen, die nicht alle Axiome erfüllen, sind nicht isomorph zu den reellen Zahlen:

Beispiel

$\mathbb{Q}$ erfüllt die Körperaxiome, die Ordnungsaxiome, aber nicht das Vollständigkeitsaxiom.

Beispiel

$M = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$. Diese Menge $M \subseteq Q$ hat kein Supremum, weil das Supremum dieser Menge $\sqrt{2}$ ist und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Mit diesen Axiomen können wir das Archimedische Axiom beweisen, was besagt, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Dies können wir beweisen, mit Hilfe des Vollständigkeitsaxiom.

Beweis: Archimedisches Axiom.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Aus diesem Grund muss das Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{N}$ gelten.
Ich nehme an, es existiere ein $c = \sup(\mathbb{N})$. Das heißt, dass folgende Bedinungen gelten müssen:

1. $\forall (n \in \mathbb{N}) : (n \leqslant c)$
2. c ist die kleinste obere Schranke. Aus diesem Grund darf $c-1$ keine obere Schranke sein. Das heißt: $\exists (n_1 \in \mathbb{N}) : (n_1 > c-1)$. Dies bedeutet aber $\exists (n_1 \in \mathbb{N}) : (n_1 + 1 > c)$

Da $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist, muss gelten $(n_1 + 1) \in \mathbb{N}$. Das ist aber ein Widerspruch zur Existenz einer oberen Schranke. Also kann es keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ geben.

Beispiele

- $\inf(]0,1[)$
- $\neg \exists (\min(]0,1[))$
- $\sup(]0,1]) = 1 = \max(]0,1])$
- Sei $M =]-1,2[\cup \{3\}$. Dann gilt:
  - $\inf(M) = -1$
  - $\sup(M) = 3 = \max(M)$

Datum: 15.04.2003

Organisatorisches

- Dozent
  - heißt „Kühn“
  - Sprechzeit: Mittwochs, 14..15 Uhr, Raum 4-15
  - Tel: 0341-97-32148
  - e-Mail: kuehn@math.uni-leipzig.de
- Übung von Dr. Schulze Montag, 9.15 Uhr
  - Raumänderung
    - neuer Raum: SG 3-37

[...zu spät weil es der Lokführer nicht nötig hatte, die Türen freizugeben...]

zu zeigen ist:
a) $\exists(\sup(M))$, $c=\sup(M)\in\mathbb{R}$
b) $c^n=a$

zu a):

- zu zeigen ist:
  - M ist nach oben beschränkt (also nach dem Vollständigkeitsaxiom: $c:=\sup(M)$)
  - also: $s:=max(1,a)$ ist die obere Schranke von M
  - also: $\forall(x):((x\in M)\Rightarrow(x\geqslant s))$
  - also: $\forall(x):((x<s)\Rightarrow(x\notin M))$
- 1. Fall: $0<a\leqslant 1$, also $s=1$
  - Sei $x>1$.
  - Dann müsste gelten: $x^n>1^n=1\geqslant a$, also $x^n>a$
  - also $x\notin M$
- 2. Fall: $a>1$, also $s=a$.
  - Sei $x>a$.
  - Dann müsste gelten: $x^n=x\cdot x^{n-1}>a\cdot 1^{n-1}=a\cdot 1=a$,
  - also $x\notin M$

[...Tafel abgewischt...]
zu b):
[...Tafel abgewischt...]

- zu zeigen ist: $c^n=a$
- genau zu zeigen ist: Die Relationen $c^n>a$ und $c^n<a$ gelten nicht.
- Wir machen einen indirekten Beweis:
  - Wir nehmen an:
    - $c^n\neq a$, das heißt es gilt
      - entweder $c^n>a$
      - oder $c^n<a$

- 1. Fall: $c^n > a$:
  - Wir wenden die Operation $\cdot$ an mit $x = c$, $y = c - \epsilon$, wobei $\epsilon \in]0, c[$ beliebig ist (später wählen wir aber ein spezielles ϵ)
  - $c^n - (c-\epsilon)^n = \epsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (c^k \cdot \text{[... abgewischt...]}) = \text{[...abgewischt...]}$
  - [...Tafel abgewischt...]
  - Wir wählen jetzt: $\epsilon := \min\left(c, \frac{c^n - a}{n \cdot c^{n-1}}\right)$, $\epsilon > 0$ nach Annahme.
  - $\Rightarrow \left(c^n - (c-\epsilon)^n \geqslant c^n - a\right)$
  - $\Rightarrow \left(a \geqslant (c-\epsilon)^n\right)$
  - $\Rightarrow \forall (x \in M) : \left(x^n \leqslant a \leqslant (c-\epsilon)^n \Leftarrow x \geqslant c - \epsilon\right)$, das heißt: $c - \epsilon$ ist obere Schranke von M
  - Das widerspricht aber: $c = \sup(M)$ (also c ist die kleinste obere Schranke von M)
  - also ist die Annahme falsch.
- [...Tafel abgewischt...]
  - 2. Fall

[...Tafel abgewischt...]

Definition: Rationale Exponenten

Sei $\left(r = \frac{m}{n}\right) \wedge (m, n \in \mathbb{N}) \wedge (a > 0)$. Wir setzen $a^r := \sqrt[n]{a^m}$, $a^{-r} := \frac{1}{a^r}$.

Bemerkung

Noch zu zeigen ist, dass die Definition ist unabhängig von der Darstellung von r, das heißt: zu zeigen ist: $\left(r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}\right) \Rightarrow \left(\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}\right)$.

Definition: beliebige reelle Exponenten

Wir definieren für $(a > 0) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (x > 0)$: $a^x := \sup\left(\left\{a^r \middle| (0 < r \leqslant x) \wedge (r \in \mathbb{Q})\right\}\right)$.

Bemerkung

Das heißt, dass die Potenzgesetze erhalten bleiben (für alle Potenzen, die definiert sind).

Bemerkung

$\sqrt[3]{-8} = -2$ ist eine sinnvolle Definition (in $\mathbb{R}$), da $(-2)^3 = -8$.
Aber: Vorsicht mit den Potenzgesetzen.
Dies zum Beispiel $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ ist ein Widerspruch.

Fazit

Für unsere Definition der Potenzen a^x gelten die Potenzgesetze, falls $a > 0$.

 Beispiel

Bemerkung

Nach Potenzgesetzen gilt: $\forall(a\in\mathbb{R}_{-}^{+}):\left(a^0=a^{1-1}=a\cdot a^{-1}=a\cdot\frac{1}{a}=1\right)$.

Das heißt, dass eine Definition $\forall(a\in\mathbb{R}):\left((a\neq 0)\Rightarrow(a^0=1)\right)$ „passt“ zu den Potenzgesetzen und 0^0 kann nicht sinnvoll definiert werden.

1.5 Einige wichtige Ungleichungen

Motivation

Ungleichungen liefern sogenannte „Abschätzungen“, eine typische Technik der Analysis, die man durch Übung erlernen muss.

Satz: Ungleichungen von arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\forall(n\in\mathbb{N}):\forall(a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+):\left(\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k)\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(a_k)\right)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n$:

Der Beweis beruht auf folgendem

Lemma

Sei $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\ldots a_n>0$ mit $\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k)\right)=1$ gegeben. Dann gelte: $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)\right)\geqslant n$. Gleichheit gelte genau dann, wenn $a_1=\ldots=a_n=1$.

Beweis

Vollständige Induktion nach n (also Anzahl der Summanden|Faktoren a)

Induktionsanfang

Sei $n=1$. Dann gilt:

$$\left(\prod_{k=1}^{1}(a_k)\right)=a_1=1$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{1}(a_k)\right)=a_1=1\geqslant 1$$

„okay“

Induktionsschritt

Voraussetzung

Das Lemma gelte für $n\in\mathbb{N}$

Behauptung

Das Lemma gilt auch für $n+1$.

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} > 0$.

Aus $\left(\prod_{k=1}^{n+1} (a_k)\right) = 1$ folgt $a_1 = \max_{1 \geqslant k \geqslant n+1} (a_k)$, $a_{n+1} = \min(a_k) \leqslant 1$

- Wäre $a_1 < 1$, dann würde folgen: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} < 1$ (weil $(a_1 < 1) \wedge (a_2 < 1) \wedge \ldots \wedge (a_{n+1} < 1)$). Dies ist ein Widerspruch.
- Wäre $a_{n+1} > 1$, dann würde folgen: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} > 1$ (weil $(a_1 > 1) \wedge (a_2 > 1) \wedge \ldots \wedge (a_{n+1} > 1)$). Dies ist ein Widerspruch.

Schreiben wir a_1, a_{n+1} in der Form $a_1 = 1 + x$, $a_{n+1} = 1 - y$ mit $x, y > 0$.

(1) $(a_1 \cdot a_{n+1}) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$
$\Rightarrow a_1 \cdot a_n + 1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$
(2) $a_1 \cdot a_{n+1} = (1+x) \cdot (1-y) = 1 + x - y - x \cdot y \leqslant 1 + x - y$
$a_1 + a_{n+1} = 1 + x + 1 - y = 1 + (1 + x - y) \geqslant 1 + a_1 \cdot a_{n+1}$
Aus (1)+(2) folgt: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \geqslant n+1$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn Gleichheit in (1) und (2) gilt, und dies gilt genau dann, wenn $(a_1 \cdot a_{n+1} = 1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n) \wedge ((x \cdot y = 0) \Rightarrow ((x=0) \vee (x=0)) \Leftrightarrow (a_1 = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 1))$

Beweis

der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel.
Sei $g := \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} > 0$

$$\Rightarrow g^n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$
$$\Rightarrow \frac{a_1}{g} \cdot \frac{a_2}{g} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{g} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g} + \ldots + \frac{a_n}{g} \geqslant n$$
$$\Rightarrow g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn Gleichheit im Lemma gilt, also genau dann, wenn $\frac{a_1}{g} = \frac{a_2}{g} = \ldots = \frac{a_n}{g}$, also genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Datum: 17.04.2003

[...zu spät...]

Induktionsbeweis

$$\forall(n\in\mathbb{N}):\forall(a_1,a_2,\ldots,a_n\geqslant 0):\left(\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)$$

$$\forall(n\in\mathbb{N}):\forall(a_1=a_2=\ldots=a_n\geqslant 0):\left(\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)$$

Satz: Variante der Bernoullischen Ungleichung

(von Bernoulli (1654..1705))

$\forall(\alpha\in]0,1]):\forall(x\in[-1,\infty]):\left((1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha\cdot x\right)$

Gleichheit besteht genau dann, wenn $\alpha=1$ (dies ist trivial).

Beweis

- 1. Fall: Der Exponent α ist rational, also $\exists(m\in\mathbb{Z}):\exists(n\,\mathbb{Z}_-^+):\left(\alpha=\dfrac{m}{n}\right)$.

  Dann gilt: (ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei: $\alpha<1$, also $m<n$)
  - $$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=(1+x)^{\frac{m}{n}}\\&=\sqrt[n]{(1+x)^m}\\&=\sqrt[n]{(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}\\&\leqslant\frac{m\cdot(1+x)+(n-m)\cdot 1}{n}\\&=\frac{n+m\cdot x}{n}\\&=1+\frac{m}{n}\cdot x\\&=1+\alpha\cdot x\end{aligned}$$
  - 2. Fall: Der Exponent α ist reell, also nach der Definition gelte $(1+x)^\alpha=\sup\left(\left\{(1+x)^r\,\middle|\,(r\in\mathbb{Q})\wedge(0<r<\alpha)\right\}\right)$
    - Für $x\geqslant 0$:
      - Sei $\epsilon\in\mathbb{R}^+$.

        Nach der Definition des Supremums $\exists(r\in\mathbb{Q}):\left((0<r<\alpha)\Rightarrow\left((1+x)^r>(1+x)^\alpha-\epsilon\right)\right)$

        (das heißt, dass es keine obere Schranke von M ist.)

        $\Rightarrow(1+x)^\alpha\leqslant(1+x)^r+\epsilon\leqslant 1+r\cdot x+\epsilon\leqslant 1+\alpha\cdot x+\epsilon$
      - $\Rightarrow\forall(\epsilon\in\mathbb{R}^+):\left((1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha\cdot x\right)$

[...]

Satz: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\forall (n \in \mathbb{N}): \forall (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}): \forall (b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}): \left(\left| \sum_{i=1}^{n} (a_1 \cdot b_i) \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{\,2}) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i^{\,2}) \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Euklidisches Skalarprodukt (Wiederholung aus der Linearen Algebra)

$$\forall (n \in \mathbb{N}): \forall \left(x, y \in \mathbb{R}^n \right): \left(\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \right)$$

$$\forall (n \in \mathbb{N}): \forall (x \in \mathbb{R}^n): \left(\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \right)$$

Die Ungleichung besagt:
$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$

Beweis

Wir setzen $A := \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{\,2}) \right)$, $B := \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i^{\,2}) \right)$.

$$\sqrt{\frac{a_i^{\,2}}{A^2} \cdot \frac{b_i^{\,2}}{B^2}} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_i^{\,2}}{A^2} \cdot \frac{b_i^{\,2}}{B^2} \right)$$

Wenn $(A=0) \vee (B=0)$, dann ist nichts zu zeigen, da dann auf beiden Seiten der Ungleichung 0 stehen würde.

Seien also $(A>0) \wedge (B>0)$.

Dann gilt: $\frac{1}{A \cdot B} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{|a_i|^2}{A^2} \cdot \frac{|b_i|^2}{B^2}} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{A^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i^{\,2}) + \frac{1}{B^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (b_i^{\,2}) \right) = 1$

Die Multiplikation mit $A \cdot B$ ergibt die Behauptung.

Satz: Minkowskische Ungleichung

$$\forall (n \in \mathbb{N}): \forall (a_i, b_i \in \mathbb{R}): \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \left((a_i + b_i)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{\,2}) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i^{\,2}) \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Wiederholung aus linearer Algebra

$$\forall (x, y \in \mathbb{R}): (\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|)$$

Bemerkung

Diese Ungleichungen lassen sich verallgemeinern (obiges Beispiel).

1. AGM-Ungleichung:

$$\forall (0 < \alpha_i < 1): \left(\left((a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1) \wedge (a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0) \right) \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} \left(a_1^{\,\alpha_i} \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \cdot a_i) \right) \right)$$

(in der bewiesenen Form $\forall(i):\left(\alpha_i=\frac{1}{n}\right)$)

2. Cauchy-Schwarz: $(p=2)\Rightarrow(p'=2)$
   Verallgemeinerung (Höldersche Ungleichung):
   - Sei $1<p<\infty$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$.
     Dann gilt: $\forall(n\in\mathbb{N}):\forall(a_i,b_i\in\mathbb{R}):\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i)\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|^p)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(|b_i|^{p'})\right)^{\frac{1}{p'}}\right)$
3. Minkowski gilt uch für Exponenten $1\leqslant p<\infty$ anstelle $p=2$.
   $\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i+b_i|^p)\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|^p)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(|b_i|^p)\right)^{\frac{1}{p}}$

Die erweiterte reelle Achse

$\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

- Ordnungsaxiome:
  - $\forall(a\in\mathbb{R}):(-\infty<a<+\infty)$
- algebraische Operationen:
  - $\forall(a\in\mathbb{R}):(+\infty+a=+\infty)$
  - $\forall(a\in\mathbb{R}):(-\infty+a=-\infty)$
  - $\forall(a\in\mathbb{R}^+):(+\infty\cdot a=+\infty)$
- nicht definierte Ausdrücke:
  - $-\infty+\infty$
  - $0\cdot\infty$
  - $\frac{\infty}{\infty}$

Mit dieser Definition bleiben alle Rechenregeln, die in $\mathbb{R}$ gelten, auch in $\overline{\mathbb{R}}$ gültig, sofern alle auftretenden Ausdrücke definiert sind.

Bemerkung

$(\overline{\mathbb{R}},+,\cdot)$ ist kein Körper mehr. [Claus Stadler: „Ist es dann ein Geist?“]

2. Folgen

2.1 Grundbegriffe

Definition: reelle Zahlenfolge

Eine **reelle Zahlenfolge** ist eine Abbildung $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl eine reelle Zahl zuordnet. Dabei heißt $a_n:=f(n)$ n -tes Folgenglied.

Schreibweisen

(a_n) , $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und andere

Beispiel

- $a_n=\frac{1}{n}$.
- $n_k=k^2$
- $n_k=2^k$
- $n_k=k$ -te Primzahl

Definition: nach oben beschränkt

Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, falls $\exists(c\in\mathbb{R}):\forall(n\in\mathbb{N}):(a_n\leqslant c)$

Definition: nach unten beschränkt

Eine Folge (a_n) heißt **nach unten beschränkt**, falls $\exists(c\in\mathbb{R}):\forall(n\in\mathbb{N}):(a_n\geqslant c)$

Definition: beschränkt

Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, falls (a_n) nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition: monoton wachsend

Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, falls gilt: $\forall(n\in\mathbb{N}):(a_{n+1}\geqslant a_n)$

Definition: monoton fallend

Eine Folge (a_n) heißt **monoton fallend**, falls gilt: $\forall(n\in\mathbb{N}):(a_{n+1}\leqslant a_n)$

Definition: streng monoton wachsend

Eine Folge (a_n) heißt **streng monoton wachsend**, falls gilt: $\forall(n\in\mathbb{N}):(a_{n+1}>a_n)$

Definition: streng monoton fallend

Eine Folge (a_n) heißt **streng monoton fallend**, falls gilt: $\forall(n\in\mathbb{N}):(a_{n+1}<a_n)$

Definition: Teilfolge

Ist $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Beispiel

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k=1}^{\infty},\ \left(\frac{1}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty}$$

anschaulich:
Wir greifen aus der Folge (a_n) unendlich viele Folgenglieder heraus und nummierieren diese neu.

a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$	$\frac{1}{9}$	$\dots$	$\frac{1}{16}$
alter Index	1	2	3	4	5	6		9		16
neuer Index	1			2				3		4

Teilfolge $(a_n n_k)_{k=1}^{\infty}: 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

Definition: Grenzwert

Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert („Limes") einer Folge (a_n), falls gilt: $\forall(\epsilon > 0) : \exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : (|a_n - a| < \epsilon)$

Bemerkung

1. Schreibweise: $a_n \to a$, $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$
2. Sprechweise:
   - a_n strebt gegen a
   - a_n konvergiert a
3. $a \in \mathbb{R}$ ist nicht Grenzwert der Folge (a_n) genau dann, wenn $\exists(\epsilon_0 > 0) : \forall(n \in \mathbb{N}) : \exists(k \geqslant n) : (|a_k - k| \geqslant \epsilon_0)$, genau dann wenn $\exists(\epsilon_0 > 0) : \exists(\text{unendlich viele Folgenglieder } a_k) : (|a_k - a| \geqslant \epsilon_0)$
4. anschaulich: $\forall(\epsilon > 0)$ liegen fast alle Folgenglieder (das heißt: alle bis auf endlich viele) im Intervall $]a - \epsilon, a + \epsilon[$

Definition: konvergiert gegen

EIne Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
$\forall(\epsilon>0) : \exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : (|a_n - a| < \epsilon)$
(das heißt: für alle $\epsilon > 0$ gilt für „fast alle“ n: $|a_n - a| < \epsilon$)

Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig, falls er existiert.

Beweis

Annahme

Sei (a_n) eine Folge, die gegen a und b konvergiert, wobei $a \neq b$. Dann setzen wir $\epsilon := |a - b| > 0$.

Schlussfolgerung

Dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit
$\left(\forall(n \geqslant n_1) : \left(|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}\right)\right) \wedge \left(\forall(n \geqslant n_2) : \left(|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}\right)\right)$
$\Rightarrow \forall(n \geqslant n_0 := \max(n_1, n_2)) : (\epsilon = |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| < \epsilon)$
Damit ist die Annahme falsch, der Satz bewiesen.

Definition: konvergent

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent**, falls $\exists(a \in \mathbb{R}) : \left(\lim_{n \to \infty}(a_n) = a\right)$

Definition: Nullfolge

Eine Folge (a_n) heißt **Nullfolge**, falls $\lim_{n \to \infty}(a_n) = 0$

Definition: divergent

Eine Folge (a_n) heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergiert.

Definition: bestimmt divergent

Eine Folge (a_n) heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$, falls gilt:
$\forall(C > 0) : \exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : (a_n > C)$. Schreibweise: $\lim_{n \to \infty}(a_n) = +\infty$
Eine Folge (a_n) heißt **bestimmt divergent** gegen $-\infty$, falls gilt:
$\forall(C > 0) : \exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : (a_n < C)$. Schreibweise: $\lim_{n \to \infty}(a_n) = -\infty$

Bemerkung 1

Oft sagtman (etwas inkonsequent), „ (a_n) konvergiert gegen $\pm\infty$ “. Besser wäre: „ (a_n) divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$ “

Eigenschaften

Es gilt:
a) $(a_n).istNullfolge() \Leftrightarrow (|a_n|).istNullfolge()$
b) $((\forall(n\in\mathbb{N}):(|a_n|\leqslant b_n))\wedge((b_n).istNullfolge()))\Rightarrow((a_n).istNullfolge())$
$(\lim(b_n)=0)\Rightarrow(\forall(\epsilon>0):\exists(n_0\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant 0):(|a_n|\leqslant b_n=|b_n|=|b_n.0|<\epsilon))$

Unsere nächsten Ziele sind:
- Sätze über konvergente Folgen (insbesondere Rechenregeln für Grenzwerte)
- Berechnung spezieller Grenzwerte

Satz

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann gegen $a\in\mathbb{R}$, wenn alle Teilfolgen $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ gegen den selben Grenzwert konvergieren

Beweis

Voraussetzung

Sei $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=a$, das heißt: fast alle Glieder der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liegen im Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, wobei $\epsilon>0$ beliebig vorgegeben ist.

Beweis

Das gilt dann auch für fast alle Glieder der Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.
Kontraposition: Wir zeigen: für jede Teilfolge (a_{n_k}) gilt: $\neg((a_{n_k})\underset{k\to\infty}{\rightarrow} a)\Rightarrow\neg(a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a)$
$\neg(a_{n_k}\to a)$, das heißt: $\exists(\epsilon_0>0):\overset{\infty}{\exists}(k\in\mathbb{N}):(|a_{n_k}-a|\geqslant\epsilon_0)$ $\Rightarrow\neg(a_n\to a)$

Beispiel

Sei $a_n=(-1)^n$.
Dann gilt:
$(\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2\cdot n})=1)\wedge(\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2\cdot n-1})=-1)$
$\Rightarrow(a_n)$ ist nicht konvergent, also divergent.

Satz: Elementare Grenzwerte 1

1. $\forall(\alpha>0):\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=0\right)$

Beweis

Sei $\epsilon>0$. Wir wählen $n_0\in\mathbb{N}$ mit $n_0>\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Dann gilt:

$\forall(n\geqslant n_0):\left(\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{1}{n_0^{\ \alpha}}<\epsilon\right)$

Satz: **Elementare Grenzwerte 2**

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)=1$

Beweis

Wir benutzen die Bernoullische Ungleichung $\forall\left(\left(\alpha\in\left]0,1\right[\right)\wedge(x\geqslant-1)\right):\left((1+x)^\alpha\leqslant1+\alpha\cdot x\right)$ mit $x=\sqrt{n}$ und $\alpha=\frac{2}{n}$.

Dann gilt:

$\forall(n\geqslant2):\left(1<\sqrt[n]{n}=\left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}\leqslant\left(1+\sqrt{n}\right)^{\frac{2}{n}}\leqslant1+\frac{2}{n}\cdot\sqrt{n}=1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$. Zu gegebenem $\epsilon>0$ gilt: $\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}<1+\epsilon\right)\Leftrightarrow\left(n>\left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2\right)$.

Wir wählen $n_0\in\mathbb{N}$, sodass $n_0>\left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2$.

Dann gilt: $\forall(n\geqslant n_0):\left(\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\epsilon\right)$

Satz: **Elementare Grenzwerte 3.1**

3.

1. $\forall(|a|<1):\left(\lim\limits_{a\to\infty}(a_n)=0\right)$

Beweis 1

Sei $a=0$. Dann gilt: $\Rightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}(a^n)=0\right)$

Beweis 2

Sei $a\neq0$. Dann gilt:

Sei $x:=\frac{1}{|a|}-1>0$.

Aus der Bernoullischen Ungleichung $\forall\left(\left(\alpha\in\left]0,1\right[\right)\wedge(x\geqslant-1)\right):\left((1+x)^\alpha\leqslant1+\alpha\cdot x\right)$ folgt:

$\left(\frac{1}{|a|^n}=(1+x)^n\geqslant1+n\cdot x>n\cdot x\right)\Leftrightarrow\left(|a|^n<\frac{1}{n\cdot x}\right)$.

Sei $\epsilon>0$ gegeben, so wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n_0 \cdot x} < \epsilon$.
Dann gilt:

$$\forall (n \geqslant n_0)\left(|a|^n < \frac{1}{n \cdot x} \leqslant \frac{1}{n_0 \cdot x} < \epsilon\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to a} (a^n) = 0$$

Satz: Elementare Grenzwerte 3.2

2. $\forall (a=1): \left(\lim_{a \to \infty} (a_n) = 1\right)$

Beweis

Sei $a=1$.
Dann gilt: $\lim (a^n) = 1$

Satz: Elementare Grenzwerte 3.3

3. $\forall (a>1): \left(\lim_{a \to \infty} (a_n) = +\infty\right)$

Beweis

Sei $a>1$. Zu zeigen ist: $\lim_{n \to \infty} (a^n) = +\infty$, also $\forall (C>0): \exists (n_0 \in \mathbb{N}): \forall (n \geqslant n_0): (a^n > C)$. Dies gilt genau dann, wenn $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} < \frac{1}{C}$. Aus dem Beweis von Satz 3.1 folgt: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{a^n}\right) = 0$, das heißt (wir nehmen $\epsilon = \frac{1}{C}$) $\forall (\epsilon>0): \exists (n_0 \in \mathbb{N}): \forall (n \geqslant n_0): \left(\left|\frac{1}{a^n}\right| < \epsilon = \frac{1}{C}\right)$.

Satz: Elementare Grenzwerte 3.4

4. $\forall (a \leqslant -1): \left(\neg \exists \left(\lim_{a \to \infty} (a_n)\right)\right)$ [an der Tafel stand lediglich $\forall (a<-1): \left(\neg \exists \left(\lim_{a \to \infty} (a_n)\right)\right)$]

Beweis

Sei $a<-1$.
Daraus folgt:

$$\left(\left(\lim_{n \to \infty} (a_{2 \cdot n}) = \lim_{a \to \infty} \left((a^2)^n\right) = +\infty\right) \wedge \left(\lim_{n \to \infty} (a_{2 \cdot n+1}) = \lim_{a \to \infty} \left((a^2)^n \cdot a\right) = -\infty\right)\right)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Grenzwertes, also $\neg \exists \left(\lim_{n \to \infty} (a^n)\right)$

Satz: Elementare Grenzwerte 4

4. $\forall (\alpha \in \mathbb{R}): \left((|a|<1) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right) = 0\right)\right)$

Beweis 1

Sei $\alpha \leqslant 0$, also $n^{\alpha} \leqslant 1$. Dann gilt:
$\left|\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}\right| \leqslant \frac{1}{|a|^{n}} = \left(\frac{1}{|a|}\right)^{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Aus der Bemerkung folgt: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}\right) = 0$.

Beweis 2

Sei $\alpha > 0$. Dann gilt:

$|a|^{\frac{1}{\alpha}} > 1$. Wir wählen $b \in \mathbb{R}$ mit $1 < b < |a|^{\frac{1}{\alpha}}$. Wir setzen $c := \frac{b^{\alpha}}{|a|} < 1$. Wir wissen:

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$. Daraus folgt: $\exists (n_1 \in \mathbb{N}) : \forall (n \geqslant n_1) : \left(\sqrt[n]{n} = b\right)$, also $\exists (\epsilon > 0) : \exists (n_1 \in \mathbb{N}) : \forall (n \geqslant n_1) : \left(\sqrt[n]{n} = b = 1 + \epsilon\right)$
- $\lim n \to \infty \left(c^{n}\right) = 0$. Daraus folgt: $\forall (\epsilon > 0) : \exists (n_2 \in \mathbb{N}) : \forall (n \geqslant n_2) : \left(c^{n} < \epsilon\right)$

$\Rightarrow \forall \left(n \geqslant n_0 := \max(n_1, n_2)\right) : \left(\left|\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}\right| = \left(\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\alpha}}{|a|}\right)^{n} < \left(\frac{b^{\alpha}}{|a|}\right)^{n} = c^{n} < \epsilon\right)$

Bemerkung

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz, etwa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1000000}}{(1.000001)^{n}}\right) = 0$.

2.2. Sätze über konvergente Folgen und Berechnung von Grenzwerten

Satz: notwendiges Konvergenzkriterium

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis

Seien $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a \in \mathbb{R}$. Aus der Definition des Grenzwertes (wenn wir $\epsilon = 1$ setzen) $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) : \forall (n \geqslant n_0) : \left(|a_n - a| < 1\right)$ folgt:
$\forall (n \geqslant n_0) : \left(|a_n| = |(a_n - a) + a| \leqslant |a_n - a| + |a| \leqslant 1 + |a|\right)$
$\Rightarrow \forall (n \in \mathbb{N}) : \left(|a_n| \leqslant C := \max\left(\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\right\}\right)\right)$, das heißt: (a_n) ist beschränkt.

Bemerkung

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Zum Beispiel ist $a_n = (-1)^{n}$ beschränkt, $\forall (n \in \mathbb{N}) : \left(|a_n| = 1\right)$, aber $\neg\exists\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)$, denn $\lim_{n\to\infty}(a_{2\cdot n}) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty}(a_{2\cdot n+1})$. Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Grenzwertes.

Satz: Addition, Subtraktion von Grenzwerten

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen. D ann gilt: $(a_n \pm b_n).istKonvergent()$ und $\lim\limits_{n\to\infty}((a_n \pm b_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$.

Satz: Multiplikation von Grenzwerten

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen. Dann gilt: $(a_n \cdot b_n).istKonvergent()$ und $\lim\limits_{n\to\infty}((a_n \cdot b_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$.

Satz: Division von Grenzwerten

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$. Dann gilt: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right).istKonvergent()$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}.$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Satz: Addition von Grenzwerten

Seien (a_n), (b_n) konvergierende Folgen mit $\lim\limits_{n}^{\infty}(a_n)=a$, $\lim\limits_{n}^{\infty}(b_n)=b$. Dann gilt:
$\lim\limits_{n}^{\infty}(a_n \pm b_n)=a \pm b$

Satz: Multiplikation von Grenzwerten

Seien (a_n), (b_n) konvergierende Folgen mit $\lim\limits_{n}^{\infty}(a_n)=a$, $\lim\limits_{n}^{\infty}(b_n)=b$. Dann gilt:
$\lim\limits_{n}^{\infty}(a_n \cdot b_n)=a \cdot b$

Beweis

für $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $\epsilon>0$. Dann gilt:
$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n \cdot b_n - a_n \cdot b) + (a_n \cdot b - a \cdot b)| \leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n + a| \cdot |b|$. Es ist:

- $\forall (n \geqslant n_1) : (|b_n - b| < \epsilon)$ und
- $\forall (n \geqslant n_2) : (|a_n - a| < \epsilon)$ und
- $|a_n| \leqslant C$
- (a_n) konvergiert und ist damit beschänkt.

Daraus folgt:
$\forall (n \geqslant n_0 := \max(n_1, n_2)) : (|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leqslant (C + |b|) \cdot \epsilon)$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8\cdot n^3+7\cdot n^2+3}{4\cdot n^3+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^3}}{4+\frac{5}{n^3}}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{5}{n^3}\right)}=\frac{8+7\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)}{4+5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)}=2$$

Satz: Division von Grenzwerten

Seien (a_n), (b_n) konvergierende Folgen mit $\lim\limits_{n}^{\infty}(a_n)=a$, $\lim\limits_{n}^{\infty}(b_n)=b$ und $b \neq 0$. Dann gilt:
$\lim\limits_{n}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$

Bemerkung

Die Sätze gelten auch, falls $(a=\pm\infty) \vee (b=\pm\infty)$, sofern die Ausdrücke auf der rechten Seite definiert sind.

Bemerkung

Die Sätze besagen: Die Grenzwertbildung und allgemeine Operationen $\cdot+\cdot$, $\cdot-\cdot$, $\cdots$, $\frac{\cdot}{\cdot}$ können vertauscht werden. Also z.B.:

- Wenn (a_n) , (b_n) konvergieren, dann konvergiert auch $(a_n \cdot b_n)$ und es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)$

Bemerkung

Aus der Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ folgt im allgemeinen nicht die Existenz der beiden Grenzwerte $\lim_{n\to\infty}(a_n)$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n)$.

Beispiel

Seien $a_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ n & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ \frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$

Satz: Monotonie des Grenzwertes

(Dies bedeutet die Verträglichkeit des Grenzwertes mit der Ordnungsstruktur in $\mathbb{R}$).
Seien (a_n) , (b_n) konvergierende Folgen mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$. Dann gilt:
$(\forall (n \geqslant n_1) : (a_n \leqslant b_n)) \Rightarrow (a \leqslant b)$

Beweis

wird indirekt geführt:
Annahme: $a > b$. Sei $\epsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Dann gilt:
$\exists (n_2, n_3 \in \mathbb{N}) : ((\forall (n \geqslant n_2) : (|a_n - a| < \epsilon)) \wedge (\forall (n \geqslant n_3) : (|b_n - b| < \epsilon)))$
$\forall (n_0 := \max(n_1, n_2, n_3)) : \left(b_{n_0} < b + \epsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \epsilon < a_{n_0}\right)$
Dies ist ein Widerspruch.

Satz: Monotonie des Grenzwertes (Sandwitch-Theorem)

(Dies bedeutet die Verträglichkeit des Grenzwertes mit der Ordnungsstruktur in $\mathbb{R}$).
Seien (a_n) , (b_n) , (c_n) konvergierende Folgen mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$. Dann gilt:
$((\forall (n \geqslant n_1) : (a_n \leqslant c_n \leqslant b_n)) \wedge (a = b)) \Rightarrow \left((c_n).konvergiert() \wedge \left(\lim_{n\to\infty}(c_n) = a\right)\right)$

Beweis

Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists (n_2, n_3 \in \mathbb{N}) : ((\forall (n \geqslant n_2) : (|a_n - a| < \epsilon)) \wedge (\forall (n \geqslant n_3) : (|b_n - a| < \epsilon)))$
$\Rightarrow \forall (n \geqslant n_0 := \max(n_1, n_2, n_3)) : (a - \epsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \epsilon)$, das heißt insbesondere

$\forall(n\geqslant n_0:=\max(n_1,n_2,n_3)):(|c_n-a|<\epsilon)$

Satz

Sei (a_n) konvergierend und $\lim_{n\to\infty}(a_n)=a>0$. Dann folgt für alle Exponenten $p\in\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^p)=a^p$.

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $(\forall(n\in\mathbb{N}):(a_n>0))\wedge(a=1)$. (Falls $a\neq0$ ist, gehe man zur Folge $b_n:=\frac{a_n}{a}$ über. $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(b_n)=1$ $\Rightarrow\frac{1}{a\cdot p}\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n{}^p)=\lim_{n\to\infty}(b_n{}^p)=1$)

1. Fall

Sei $p\in\mathbb{N}$. Dann folgt der Satz aus $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(b_n)$ (angewandt auf $b_n=a_n$) und vollständiger Induktion.

2. Fall

Sei $(m\in\mathbb{N})\wedge(p=-m)$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^p)=\lim_{n\to\infty}(a_n{}^{-m})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n{}^m}\right)=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}(a_n{}^m)}=\frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)^m}=\frac{1}{a^m}=a^p$$

3. Fall

Sei $p=\alpha\in]0,1[$, $\lim_{n\to\infty}(a_n)=1$. Nach Voraussetzung gilt dann: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)=1$, das heißt: Die Folgen $x_n:=a_n-1$ und $y_n:=\frac{1}{a_n}-1$ sind Nullfolgen.

- Sei $n\in\mathbb{N}$ (beliebig, aber fest)
  - Falls $a_n\geqslant1$:
    - $0\leqslant a_n{}^\alpha-1=(a+x_n)^\alpha-1\leqslant1+\alpha\cdot x_n-1\leqslant x_n$ (Angewandt wurden: (die Bernoullische Ungleichung) und ($(0<\alpha<1)\wedge(x_n\geqslant0)$))
  - Falls $a_n\leqslant1$:
    - $0\leqslant1-a_n{}^\alpha=a_n{}^\alpha\cdot\left(\frac{1}{a_n{}^\alpha}-1\right)\leqslant a_n{}^\alpha\cdot\left((y_n+1)^\alpha-1\right)\leqslant1+\alpha\cdot y_n-1\leqslant y_n$
    - $\Rightarrow\forall(n\in\mathbb{N}):(|a_n{}^\alpha-1|\leqslant|x_n|+|y_n|)$
      - $(|x_n|)$ ist eine Nullfolge
      - $(|y_n|)$ ist eine Nullfolge
      - $\Rightarrow(|x_n|+|y_n|)$ ist eine Nullfolge
    - Daraus und aus der Monotonie des Grenzwertes folgt also, dass $(a_n{}^\alpha-1)$ eine Nullfolge ist, also gilt: $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^\alpha)=1$.

4. Fall

Sei $p \in \mathbb{R}$.

- Ist $p \in \mathbb{Z}$, dann haben wir das schon bewiesen.
- Ist $p \notin \mathbb{Z}$, dann $\exists!(m \in \mathbb{Z}): \exists!(\alpha \in]0,1[): (p = m + \alpha)$
  $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^p) = a_n{}^m \cdot a_n{}^\alpha = \lim_{n\to\infty}(a_n{}^m) \cdot \lim_{n\to\infty}(a_n{}^\alpha) = a^n \cdot a^\alpha = a^p$

Satz: Stolzscher Satz

(von Otto Stolz, 1842..1905, österreichischer Mathematiker)

Sei (b_n) eine streng monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \infty$. Dann gilt für alle Folgen (a_n): $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$ falls der rechte Grenzwert existiert.

Bemerkung

Der Satz gilt auch, falls der rechte Grenzwert $= \pm\infty$.

Bemerkung

Anwendungen des Satzes sind zum Beispiel „unbestimmte Ausdrücke“ der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Beweis

Sei $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right) = c \in \mathbb{R}$ und sei $\epsilon > 0$. Dann

$$\exists(n_1 \in \mathbb{N}): \forall(n \geqslant n_1): \left(c - \frac{\epsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < c + \frac{\epsilon}{2}\right) \qquad |\cdot(b_{n+1} - b_n) > 0$$

$$\Rightarrow \exists(n_1 \in \mathbb{N}): \forall(n \geqslant n_1): \forall(k \geqslant n_1): \left(\left(c - \frac{\epsilon}{2}\right)\cdot(b_{n+1} - b_n) < a_{k-1} - a_k < \left(c - \frac{\epsilon}{2}\right)\cdot(b_{k+1} - b_k)\right) \qquad |\sum_{k=n_1}^{n-1}$$

$$\Rightarrow \exists(n_1 \in \mathbb{N}): \forall(n \geqslant n_1): \left(\left(c - \frac{\epsilon}{2}\right)\cdot(b_n - b_{n_1}) < a_n - a_{n-1} < \left(c + \frac{\epsilon}{2}\right)\cdot(b_n - b_{n-1})\right)$$

$$\Rightarrow \exists(n_1 \in \mathbb{N}): \forall(n \geqslant n_1): \left(\left|\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c\right| < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{a_n}{b_n} - c = \frac{a_n - c\cdot b_n}{b_n}$$

$$= \frac{(a_n - a_{n_1}) + (a_{n-1} - c\cdot b_{n_1}) + (c\cdot b_{n_1} - c\cdot b_n)}{b_n}$$

$$= \frac{a_{n_1} - c\cdot b_{n_1}}{b_n} + \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n-1}} \cdot \frac{n_n - b_{n-1}}{b_n} - \frac{c\cdot(b_n - b_{n-1})}{b_n}$$ Sei $a_{n_1} - c\cdot b_{n_1} =: \rho = const$.

$$= \frac{\rho}{b_n} + \left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c\right)\cdot\frac{b_n - b_{n_1}}{b_n}$$

$$\Rightarrow \forall (n>n_1): \left(\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| \leqslant \frac{|\rho|}{b_n} + \left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right| \cdot \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} \right) \quad \forall (n > n_0 := \max(n_1, n_2)) : (<\epsilon)$$

$\exists (n_2 \in \mathbb{N}) : \forall (n \geqslant n_2) : \left(\left| \frac{\rho}{b_n} \right| < \frac{\epsilon}{2} \right)$ für $n > n_1$ (nach Wahl von n_1) da (b_n) monoton wachsend ist.

Folgerungen

1. $(x_n).konvergiert() \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k) \right) = \lim_{n\to\infty} (x_n)$ (Folge der arithmetischen Mittel)

Beweis

Wir setzen im Satz von Stolz

$\left(a_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k) \right) \wedge (b_n = n)$ (streng monoton wachsend, $\lim_{n\to\infty} (b_n) = \alpha$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} (x_n)$$

2. $((x_n).konvergiert() \wedge (\forall (n) : (x_n > 0))) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \right) = \lim_{n\to\infty} (x_n)$ (Folge der geometrischen Mittel)

Beweis

1. Fall

Sei $\lim_{n\to\infty} (x_n) = 0$: $0 \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (x_k)} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \lim_{n\to\infty} (x_n) = 0$. Aus der Monotonie der Grenzwerte folgt: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots x_n} \right) = 0$

3. $\left(\forall (n) : (x_n > 0) \wedge \exists \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) \right) \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{x_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) \right)$

Datum: 29.04.2003

[...35 Minuten zu spät...]

Satz

[...]

Beweis

Genau zu zeigen für monoton wachsende Folge (a_n) (Für monotone fallende (a_n) gehen wir zu $(-a_n)$ über).
Zu zeigen ist:

- $(a_n).konvergiert() \Rightarrow (a_n).istBeschränkt()$ (dies gilt immer, weil es notwendiges Konvergenzkriterium ist)
- $(a_n).istBeschränkt() \Rightarrow (a_n).konvergiert()$
  - Vollständigkeitsaxiom: $\exists (a \in \mathbb{R}) : (a = \sup(a_n))$

Sei $\epsilon > 0$ b eliebig, dann $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) : (a - \epsilon < a_{n_0})$ (Definition des Supremums, a-%epsilon ist <u>keine</u> obere Schranke).
Aus dem monotonen Wachstum folgt: $\forall (n \geqslant n_0) : (a - \epsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a)$ (Supremum a ist obere Schranke).
Das heißt: $\forall (n \geqslant n_0) : (|a_n - a| < \epsilon)$, das heißt: $\lim_{n \to \infty} (a_n) = a$

Bemerkung

Die Formeln gelten auch für uneigentliche Grenzwerte (also $\lim (f(n)) = \pm\infty$)

Beispiel

Näherungsverfahren zur Berechnung von Wurzeln

(Darauf beruht die Berechnung von Wurzeln per Computer)
Sei $a > 0$ gegeben, gesucht ist $\sqrt{a}$.
Wir wählen $x_0 \in \mathbb{R}^+$ beliebig und definieren rekursiv eine Folge $(x_n)_{n=1}^{a}$ durch

$$\forall (n \in \mathbb{N}) : \left(x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \right)$$

Behauptung

$$\exists \left(\lim_{n \to \infty} (x_n) \right) \wedge \left(\lim_{n \to \infty} (x_n) = \sqrt{a} \right)$$

Beweis

Wir zeigen zunächst
1. (x_n) ist beschränkt und

2. (x_n) ist monoton fallend.

Daraus würde aus obigem Satz folgen: $\exists\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right)$

1. $x_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}\geqslant 0$. Somit ist $\sqrt{a}$ untere Schranke von $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
2. $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{a}{x_n^{\;2}}}_{x_n^{\;2}\geqslant a}\right)\leqslant\frac{1}{2}\cdot(1+1)=1$, das heißt $\forall(n\geqslant 1):(x_{n+1}\leqslant x_n)$

$\Rightarrow\exists\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right)$. Wegen 1. ist $x\geqslant\sqrt{a}>0$.

Berechnung des Grenzwertes

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(x_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\right)$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{a}{x}\right)$$
$$\Rightarrow 2\cdot x^2=x^2+a$$
$$\Rightarrow x^2=a$$
$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$
$$(x>0)\Rightarrow a=\sqrt{a}$$

Bemerkung

Die Folge (x_n) konvergiert „sehr schnell“ gegen $\sqrt{a}$. Dies wird später in „Numerik“ genauer behandelt.

Bemerkung

Der Nachweis, dass der Grenzwert existiert, ist der wichtige Teil des Verfahrens [der Grenzwertbehandlung], die Berechnung des Grenzwertes selbst ist trivial.

Beispiel

Sei $x_1:=2$, $\forall(n\geqslant 1):(x_{n+1}:=2\cdot x_n)$. Daraus folgt: $x_n=2^n$ und $\lim_{n\to\infty}(x_n)=+\infty$, das heißt: (x_n) ist nicht konvergent, sie divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Wenn wir nun die Existenz eins Grenzwertes $\lim_{n\to\infty}(x_n)\in\mathbb{R}$ voraussetzen, „kommt folgender Unsinn heraus“:

Der Übergang in der Rekursionsformel liefert:

$$x=2\cdot x$$
$$x=0$$

Dies ist ein Widerspruch.

Die Eulersche Zahl e

(Basis von natürlichen Logarithmen, entdeckt von Leonhard Euler (Schweizer Mathematiker, 1707..1783), „dem bedeutendsten Mathematiker des 18. Jahrhunderts“)

Definition: Eulersche Zahl

$$e:=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Der Näherungswert ist $e\approx 2.71828...$

- Zu zeigen ist als erstes, dass der Grenzwert existiert.
  Wir setzen $a_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
  Zu zeigen ist also:
  - $a_n\leqslant b_n$ (Dies ist klar).
  - $(a_n).istMonotonWachsend()$
  - $(b_n).istMonotonFallend()$

  Daraus würde folgen: $a_1\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant b_1$, das heißt $(a_n).istBeschränkt\wedge(b_n).istBeschränkt()$, und das heißt:

  $$\exists\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)\wedge\exists\left(\lim_{n\to\infty}(b_n)\right)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}(b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}(a_n)\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=1}=\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)$$

  sowie eine Fehlerabschätzung $\forall(n\in\mathbb{N}):\left(a_n\leqslant\lim_{n\to\infty}(a_n)=\sup(a_n)=e=\lim_{n\to\infty}(b_n)=\inf(b_n)\leqslant b_n\right)$

  - Zu $(a_n).istMonotonWachsend()$:
    Nach der Bernoullischen Ungleichung ($\forall(x\geqslant -1):\forall(\alpha\in]0,1]):\left((1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha\cdot x\right)$) gilt:
    (mit $x=\frac{1}{n}$, $\alpha=\frac{n}{n+1}$)

    $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}\Big|()^{n+1}$$

    $\Rightarrow a_n\leqslant a_{n+1}$
  - Zu $(b_n).istMonotonFallend()$
    Aus Bernoulli folgt (mit $x=\frac{1}{n}$, $\alpha=\frac{n}{n+1}$):
  - $$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\Big|()^{n+1}$$

    $$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

    $$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\geqslant\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n+1-1}\right)^n+1=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

    [...]

Bemerkung

Die Folge konvergiert sehr langsam, zur numerischen Berechnung ist sie ungeeignet. Die Reihendarstellung $e=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\right)$ hat bessere Konvergenz.

Bemerkung

Falsch ist der formale Übergang zum Grenzwert wie $\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=1^\infty$

Bemerkung

Was ist $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$?

Interpretation

Das ist der Grenzwert der rekursiv definierten Folge $x:=1$, $x_{n+1}:=\sqrt{1+x_n}$ falls dieser Grenzwert existiert.

- Zu zeigen ist also: $(x_n).istBeschränkt()$
  [...von der Tafel abgewischt, obwohl älterer Text stehen gelassen wird...]
- Zu zeigen ist auch: $(x_n).istMonotonWachsend()$:
  $(x_n).istMonotonWachsend()\Leftrightarrow\left(x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}\geqslant x_n\right)\Leftrightarrow\left(1+x_n\geqslant {x_n}^2\right)$.
  Der Beweis geht durch vollständige Induktion:
  - Fall $n=1$: ${x_n}^2=1^2=1\leqslant 1+1=1+x_n$
  - Fall $n\to n+1$: $\left({x_{n+1}}^2\leqslant 1+x_{n+1}\right)\Leftrightarrow\left(1+x_n\leqslant 1+\sqrt{1+x_n}\right)\Leftrightarrow\left(x_n\leqslant\sqrt{a+x_n}\right)\Leftrightarrow\left({x_n}^2\leqslant 1+x_n\right)$
    Letzters gilt nach Induktionsvoraussetzung.
    $\Rightarrow\exists\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right)\wedge\left(\forall(n):\left({x_{n+1}}^2=1+x_n\right)\right)¿\Rightarrow x^2=1+x$
    $\Rightarrow x_{1|2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$
    Die Lösung $x_2<0$ entfällt.

Datum: 06.05.2003

Nächstes Ziel ist: Die Charakterisierung konvergenter Folgen ohne Kenntnis des Grenzwertes.

Lemma

Jede reelle Zahlenfolge enthält eine monotone Teilfolge

Beweis

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge, wir betrachten die Menge $M:=\{n\in\mathbb{N} \mid \forall(k>n):(a_n>a_k)\}$ aller „Gipfelpunkte".

- 1. Fall: $M.istUnendlich()$
  Dann existieren Indizes $(n_1,n_2,n_3,\dots,n_R\in M):(n_1<n_2<n_3<\dots<n_R)$. Nach Definition von M gilt: $a_{n_1}>a_{n_2}>a_{n_3}>\dots$. Damit gilt für die Teilfolge $((a_{n_k})_{k=1}^{\infty}).istMonotonFallend()$.
- 2. Fall: $M.istEndlich()$
  Sei $m=\max(M)$. Wir wählen $n_1>m$ beliebig.
  $\Rightarrow((n_1\notin M)\Rightarrow(\exists(n_2>n_1):(a_{n_1}\leqslant a_{n_2})))$
  $\Rightarrow((n_2\notin M)\Rightarrow(\exists(n_3>n_1):(a_{n_2}\leqslant a_{n_3})))$
  $\vdots$
  Damit existiert eine monoton wachsnde Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

Aus diesem Lemma ergibt sich der

Satz: Satz von Bolzano-Weierstraß

(von Bernhard Bolzano (1781..1848) und Karl Weierstraß (1815..1897):)
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Beweis

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt. Dann folgt aus obigem Lemma, dass eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ existiert, die natürlich ebenfalls beschränkt ist. Damit ist diese Folge konvergent.

Definition: Cauchy-Folge, Fundamentalfolge, konzentrierte Folge

Eine Folge (a_n) heißt **Cauchy-Folge** (beziehungsweise **Fundamentalfolge**, **konzentrierte Folge**), wenn gilt: $\forall(\epsilon>0):\exists(n_0=n_0(\epsilon)\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant n_0):\forall(m\geqslant n_0):(|a_n-a_m|<\epsilon)$

Satz: Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis

Zu zeigen ist:
a) $(a_n).istKonvergent()\Rightarrow(a_n).istCauchyFolge()$
b) $(a_n).istCauchyFolge()\Rightarrow(a_n).istKonvergent()$

- Zu a)
  Sei $a:=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\in\mathbb{R}$, sei $\epsilon>0$ beliebig. Dann folgt aus der Definition des Grenzwertes, dass
  $\exists(n_0\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant n_0):\left(\left|a_n-a\right|<\frac{\epsilon}{2}\right)$.
  $\Rightarrow\forall(n\geqslant n_0):\forall(m\geqslant n_0):\left(\left|a_n-a_m\right|\leqslant\underbrace{\left|a_n-a\right|}_{<\frac{\epsilon}{2}}+\underbrace{\left|a-a_m\right|}_{<\frac{\epsilon}{2}}<\epsilon\right)$
  $\Rightarrow(a_n).istCauchyFolge()$
- zu b)
  - Wir zeigen zunächst: $(a_n).istCauchyFolge()\Rightarrow(a_n).istBeschränkt()$:
    Aus der Definition der Cauchy-Folge mit $\epsilon=1$ folgt:
    $\exists(n_0\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant n_0):\forall(m\geqslant n_0):\left(\left|a_n-a_m\right|<1\right)$. Insbesondere gilt damit:
    $\exists(n_0\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant n_0):\left(\left|a_n-a_{n_0}\right|<1\right)$
    $\Rightarrow\forall(n\geqslant n_0):\left(\left|a_n\right|\leqslant\underbrace{\left|a_n-a_{n_0}\right|}_{<1}+\left|a_{n_0}\right|\leqslant1+\left|a_{n_0}\right|\right)$
    $\Rightarrow\forall(n\in\mathbb{N}):\left(\left|a_n\right|\leqslant C:=\max\left(\left\{\left|a_1\right|,\left|a_2\right|,\ldots,\left|a_{n_0}\right|\right\}\right)+1\right)$
  - Nun ist zu zeigen: $(a_n).istKonvergent()$
    Aus (a_n) folgt (mittlels dem Satz von Bolzano-Weierstraß): Es existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$
  - Wir zeigen nun: Die ganze Folge (a_n) konvergiert gegen $a:=\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k})$.
    Sei $\epsilon>0$ beliebig.
    - $(a_n).istCauchyFolge()\Rightarrow\exists(n_1\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant n_1):\forall(m\geqslant n_1):\left(\left|a_n-a_m\right|<\frac{\epsilon}{2}\right)$
    - $(a_{n_k}).konvergiertGegen(a\in\mathbb{R})\Rightarrow\exists(k_0\in\mathbb{N}):\forall(k\geqslant k_0):\left(\left|a_{n_k}-a\right|\frac{\epsilon}{2}\right)$

    $\Rightarrow\forall\left(n\geqslant n_0:=\max\left(\left\{n_1,n_{k_0}\right\}\right)\right):\left(\left|a_n-a\right|\leqslant\underbrace{\left|a_n-a_{n_{k_0}}\right|}_{\text{nach (1) }<\frac{\epsilon}{2}}+\underbrace{\left|a_{n_{k_0}}-a\right|}_{\text{nach (2) }<\frac{\epsilon}{2}}<\epsilon\right)$
    $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=a$

Bemerkung

Die Bedeutung dieses Kriteriums ist: Man kann Folgen auf Konvergenz überprüfen, <u>ohne</u> den Grenzwert zu kennen.

Bemerkung

Aus dem Kriterium folgt:
$(a_n).istDivergent()\Leftrightarrow(a_n).istKeineCauchyFolge$
$\Leftrightarrow\exists(\epsilon>0):\forall(n):\exists(m\geqslant n):\exists(k\geqslant n):\left(\left|a_m-a_k\right|\geqslant\epsilon\right)$

Beispiel

Sei $\forall(n\in\mathbb{N}):\left(s_n:=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$. $(s_n).istMonotonWachsend()$.

$$\forall(n\in\mathbb{N}):\left(|s_{2\cdot n}-s_n|=s_{2\cdot n}-s_n=\underbrace{\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geqslant\frac{1}{2\cdot n}}+\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geqslant\frac{1}{2\cdot n}}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}}_{n\text{ Summanden}}\geqslant n\cdot\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow(s_n).istKeineCauchyFolge()$

$\Rightarrow(s_n).istDivergent()$

$(s_n).istMonotonWachsend()$

$\Rightarrow(s_n).istUnbeschränkt()$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(s_n)=+\infty$

2.4 Häufungspunkt, oberer Limes, unterer Limes

Definition: Häufungspunkt

Eine Zahl a in setR heißt **Häufungspunkt** (Abkürzung: „HP“) der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wenn $\forall(\epsilon>0):\exists(\text{unendlich viele }n\in\mathbb{N}):(|a_n-a|<\epsilon)$.

Satz

$$(a\in\mathbb{R}).istHäufungspunkt((a_n))\Leftrightarrow\left(\exists\left(Teilfolge\left((a_{n_k})_{k=1}^{\infty}\right)\right):\left(a=\lim_{k\to\infty}(a_{n_k})\right)\right)$$

Beweis

Wir wählen Indizes $n_1<n_2<\ldots$ mit $|a_{n_k}-a|<\frac{1}{k}$.

(Also:

- Ist $\epsilon=1$, so folgt aus der Definition des Häufungspunktes: $\exists(n_1):(|a_{n_1}-a|<1)$
- Ist $\epsilon=\frac{1}{2}$, so folgt aus der Definition des Häufungspunktes: $\exists(n_1>n_1):\left(|a_{n_2}-a|<\frac{1}{2}\right)$
- ...

)

Das heißt: $\underbrace{a-\frac{1}{k}}_{\to q}<\underbrace{a_{n_k}}_{k\to\infty}<\underbrace{a+\frac{1}{k}}_{\to q}$. Aus der Monotonie des Grenzwertes folgt damit $((a_{n_k}).istKonvergent())\wedge\left(\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k})=a\right)$

Die andere Richtung $\Leftarrow$: Sei (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k})=a$, das heißt: $\forall(\epsilon>0):\exists(k_0\in\mathbb{N}):\forall(k\geqslant k_0):(|a_{n_k}-a|<\epsilon)$. (Dies gilt also für unendlich viele Indizes, das heißt

a ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$)

Bemerkung

Jede konvergente Folge hat nur einen Häufungspunkt, und zwar den Grenzwert der Folge. Es gilt sogar: $(a_n).istKonvergent() \Leftrightarrow (\exists(a):(a.istHäufungspunktVon((a_n))))$

Bemerkung

Wenn ein Folgenglied unendlich oft auftritt, dann ist es trivialerweise der Häufungspunkt der Folge.

Beispiel

$\forall(a \in \{-1,+1\}):(a.istHäufungspunktVon(\text{Folge } (a_n = (-1)^n)))$

Bemerkung

Andere Formulierungen des Satzen von Bolzano-Weierstraß: „Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt".

Beispiel

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar. Zu zeigen ist also: $\mathbb{Q}^+ = \left\{ r = \frac{p}{q} \middle| p, q \in \mathbb{N} \right\}$ ist abzählbar.

q\p	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{1}:1$	$\frac{2}{1}:2$	$\frac{3}{1}:6$	$\frac{4}{1}:7$	$\frac{5}{1}:15$	$\frac{6}{1}:16$
2	$\frac{1}{2}:3$	$\frac{2}{2}:5$	$\frac{3}{2}:8$	$\frac{4}{2}:14$	$\frac{5}{2}:17$	$\frac{6}{2}:27$
3	$\frac{1}{3}:4$	$\frac{2}{3}:9$	$\frac{3}{3}:13$	$\frac{4}{3}:18$	$\frac{5}{3}:26$	$\frac{6}{3}$
4	$\frac{1}{4}:10$	$\frac{2}{4}:12$	$\frac{3}{4}:19$	$\frac{4}{4}:25$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$

In dieser Tabelle sind alle positiven rationalen Zahlen enthalten. Wir wählen eine Folge über alle Einträge wie angezeigt, wobei wir Zahlen von dieser Folge streichen, die bereits einmal früher vorkamen.
Wir erhalten damit eine Folge $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, in der jede positivie rationale Zahl genau einmal vorkommt.

Wir wissen, $\mathbb{Q}^+$ ist dicht in $\mathbb{R}^+$, das heißt: $\forall(\epsilon>0):\forall(a \in \mathbb{R}^+):\exists(r \in \mathbb{Q}^+):(|a-r|<\epsilon)$.
(Der Beweis geht z.B. über die Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen.)
Daraus folgt: Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ ist Häufungspunkt der Folge (r_n)
beziehungsweise: Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt der Folge

$(r_{1,} -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \dots)$

Satz

Jede beschränkte Folge besitzt einen größten und kleinsten Häufungspunkt.

Definition: unterer Limes

Der kleinste Häufungspunkt einer Folge heißt **unterer Limes**.

Bezeichung: unterer Limes

$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n)$, $\lim_{n\to\infty}\inf(a_n)$, „limes inferior"

Definition: oberer Limes

Der kleinste Häufungspunkt einer Folge heißt **oberer Limes**.

Bezeichung: oberer Limes

$\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n)$, $\lim_{n\to\infty}\sup(a_n)$, „limes superior"

Beweis

(Nur für $\overline{\lim}$, für $\underline{\lim}$ analog).
Sei H die Menge aller Häufungspunkte der Folge (a_n).
Nach Bolzano-Weierstraß ist $H \neq \emptyset$, und wegen der Monotonie des Grenzwertes ist H beschränkt.
($(\forall(n):(|a_n| \leqslant C)) \wedge (a.istHäufungspunkt()) \wedge (a_{n_k} \to a) \Rightarrow (|a| \leqslant C)$)

Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt: $\exists(a := \sup(H) \in \mathbb{R})$. Noch zu zeigen ist: a ist selbst Häufungspunkt.

1. Fall: $a \in H$
   Es ist nichts zu zeigen.
2. Fall: $a \notin H$
   Aus der Definition des Supremums folgt: $\exists(b \in H):((b<a) \wedge \forall(\epsilon>0):(b+\epsilon>a))$.
   Wir wählen ein $\delta>0$ mit $(a-\epsilon<b-\delta) \wedge (b+\delta<a)$. Aus der Definition des Häufungspunktes folgt
   1. es existieren unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \delta$
   2. es existieren unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a-\epsilon<a_n<a$

   das heißt: $a.istHäufungspunkt()$.
   Das heißt: der Fall $a \notin H$ tritt nicht ein.

Datum: 08.05.2003

[...66 Minuten zu spät...]
[<import from="benjamin">]

Wiederholung

$a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt (oder Häufungswert) einer Folge (a_n), falls $\forall(\epsilon>0)$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - a| < \epsilon$.

- $a.istHäufungspunktVon((a_n)) \Leftrightarrow \exists((a_{n_k})_{k=1}^{\infty} = Teilfolge((a_n))) : \left(\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}) = a\right)$
- Der obere|untere Limes von (a_n) ist der größte|kleinste Häufungspunkt von (a_n) (Notation: $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)$ | $\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)$)

[...]
[</import>]

3.2 Rechenregeln und Konvergenzkriterien für Reihen

Satz

Seien $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)$ zwei konvergente Reihen. Dann gilt:

- $\forall(\lambda \in \mathbb{R}) : \exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda \cdot a_k)\right)\right)$
- $\forall(\lambda \in \mathbb{R}) : \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right)$

Beweis

Der Beweis folgt aus Rechenregeln für konvergente Folgen.

Bemerkung

Die Umkehrung gilt für $\lambda \neq 0$. $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda \cdot a_k)\right)\right) \Rightarrow \exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)\right)\right)$

Satz

Seien $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)$ zwei konvergente Reihen. Dann gilt:

- $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)\right)$
- $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k) + \sum_{k=1}^{\infty}(b_k)$

Beweis

Der Beweis folgt aus Rechenregeln für konvergente Folgen.

Bemerkung

Die Umkehrung gilt nicht: A us $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)\right)$ folgt nicht notwendigerweise $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right)\right)$ oder $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)\right)\right)$

Beispiel

Sei

- $(a_k)=(1,-1,1,-1,\ldots)$
- $(b_k)=(-1,1,-1,1,\ldots)$

$\left(\neg\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right)\right)\right)\wedge\left(\neg\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)\right)\right)\right)$, aber $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)\right)\right)$, denn $\forall(k):(a_k+b_k=0)$.

Satz

Seien $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)$ zwei konvergente Reihen. Sei $0=n_0<n_1<n_2<\ldots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\sum_{n_{k-1}<j\leq n_k}(a_j)}_{=b_c}\right)=\left(\underbrace{a_{n_0+1}+\ldots+a_{n_1}}_{=b_1}\right)+\left(\underbrace{a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2}}_{=b_2}\right)+\ldots$$

gegen die selbe Summe wie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)=a_1+a_2+\ldots$

Beweis

(Zurückführung auf Folgen)

Die Folge der Partialsummen $\sigma_l:=\sum_{k=1}^{l}(b_k)$ ist eine Teilfolge der Folge der Partialsummen $s_n:=\sum_{k=1}^{n}(a_k)$, denn $\sigma_l=\sum_{k=1}^{n_l}(a_k)=s_{n_l}$, $\exists\left(\lim_{n\to\infty}(s_n)\right)\Rightarrow\left((\sigma_l)=(s_{n_l})_{l=1}^{\infty}\right).konvergiert()$.

Bemerkung

Der Satz besagt, dass in konvergenten Reihen beliebig Klammern gesetzt werden können, ohne dass sich das Konvergenzverhalten oder die Summe der Reihe ändern.

Satz: notwendiges Konvergenzkriterium

Für jede konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{n}(a_k)$ gilt: $\lim_{n\to\infty}(a_k)=0$.

Beweis

$$\forall(n):\left(a_n=s_n-s_{n-1}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_n\right)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(s_n\right)}_{\text{existiert}}-\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(s_{n-1}\right)}_{\text{sind } s=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\right)}=0$$

Bemerkung

Das Kriterium ist <u>nicht</u> hinreichend.

Beispiel

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)$ divergiert, obwohl $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right)=0$.

Bemerkung

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\left(q^k\right)$ divergiert, falls $|q|\geqslant 1$ (dann gilt nicht: $\lim_{k\to\infty}\left(q^k\right)=0$).

Satz: Cauchy-Kriterium für Reihen

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\right)\right).konvergiert()\Leftrightarrow\left(\forall(\epsilon>0):\exists(n_0\in\mathbb{N}):\forall(m\geqslant n_0):\forall(n\geqslant m):\left(\left|\sum_{k=m}^{n}\left(a_k\right)\right|<\epsilon\right)\right)$$

Beweis

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\right)\right).konvergiert()\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{nach Definition}}\left(s_n\right).konvergiert()\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Cauchy-Kriterum für Folgen}}\left(s_n\right).istCauchyFolge()$$

Datum: 13.05.2003

Wiederholung

$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ bedeutet:

- Dies ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen $s_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k)$, sofern der Grenzwert existiert (Summe der Reihe).

Eigenschaften

$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$

- konvergiert, falls $(s_n)_n$ konvergent ist
- divergiert, falls $(s_n)_n$ divergent ist
- divergiert bestimmt, falls $\lim_{n\to\infty}(s_n)=\pm\infty$

- Notwendiges Konvergenzkriterium ist $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiert() \Rightarrow \left(\sum_{n\to\infty}(a_n)=0\right)$
- Cauchy-Kriterium: $$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiert()$$ $$\Leftrightarrow \forall(\epsilon>0):\exists(n_0\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant n_0):\forall(m\geqslant n_0):\left(\left|\underbrace{a_m+\ldots+a_n}_{\text{Abschnitt der Reihe}}\right|=\left|\sum_{k=m}^{n}(a_k)\right|<\epsilon\right)$$

Bemerkung

Insbesondere Folgt, dass die Abänderung endlich vieler Reihenglieder das Konvergenzverhalten der Reihe nicht ändert (wohl aber die Summe)

Satz

Sei $\exists(k_0\in\mathbb{N}):\forall(k\geqslant k_0):(a_k\geqslant 0)$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiert() \Leftrightarrow \left(\text{(Folge) } (s_n)_{n=1}^{\infty}\right).istBeschränkt()$$

Beweis

Nach Voraussetzung ist $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ab $n=k_0$ monoton wachsend. Daraus folgt: $((s_n)).istKonvergent() \Leftrightarrow ((s_n)).istBeschränkt()$.

Definition: absolut konvergent

Eine Reihe $\sum_{k\to\infty}(a_k)$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum_{k\to\infty}(|a_k|)$ konvergiert.

Bemerkung

$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).istAbsolutKonvergent()$ gilt genau dann, wenn die Folge $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|)$ beschränkt ist, wobei $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n}(|a_k|)$.

Satz

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis

(mittels des Cauchy-Kriteriums)
Sei $\left(\sum_{k\to\infty}(a_k)\right).istAbsolutKonvergent()$ und $\epsilon > 0$.
Dann folgt daraus:

$$\exists (n_0 \in \mathbb{N}) : \forall (m \geqslant n_0) : \forall (n \geqslant m) : \left(\sum_{k=m}^{n}(|a_k|) < \epsilon\right)$$

$$\Rightarrow \exists (n_0 \in \mathbb{N}) : \forall (m \geqslant n_0) : \forall (n \geqslant m) : \left(\left|\sum_{k=m}^{n}(a_k)\right| < \epsilon\right)$$

(Dies folgt aus der Dreiecksungleichung)
$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ erfüllt das Cauchy-Kriterium. Daraus folgt, dass $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiert()$.

Bemerkung

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Es gibt konvergente Reiehen, die nicht absolut konvergent sind. Das Beispiel wird demnächst geliefert.

Satz: Vergleichskriterium, Majorantenkriterium

Gegeben seien zwei Folgen (a_k) und (b_k). Dann gilt:

$$\left(\exists (k_0) : \forall (k \geqslant k_0) : (|a_k| \leqslant b_k) \wedge \left(\sum_{k\to\infty}(b_k)\right).konvergiert()\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut().$$

Definition: Majorante

Dabei heißt die Zahl $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ (**konvergente**) **Majorante** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$.

Beweis

Wie im vorherigen Satz.

Satz: Vergleichskriterium, Minorantenkriterium

Gegeben seien zwei Folgen (a_k) und (b_k). Dann gilt:

$\left(\exists(k_0):\forall(k\geqslant k_0):(a_k\geqslant b_k\geqslant 0)\wedge\left(\sum_{k\to\infty}(b_k)\right).divergiert()\right)\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).divergiert()$.

Definition: Minorante

Dabei heißt die Zahl $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ (**divergente**) **Minorante** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$.

Beweis

Der Beweis geht indirekt. Wir nehmen an, dass $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).istKonvergent()$. Dann muss aus dem Majorantenkriterium folgen, dass $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)\right).konvergiert()$. Das ist ein Widerspruch.

Satz: Verdichtungskriterium

Sei $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant\ldots\geqslant 0$.
Dann gilt: $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiert()\Leftrightarrow\left(\sum_{m=0}^{\infty}(2^m\cdot a_{2^m})\right).konvergiert()$.

Beweis

Seien $s_n:=\sum_{k=1}^{n}(a_k)$ und $\sigma_l:=\sum_{m=0}^{l}(2^m\cdot a_{2^m})$ die Partialsummen der beiden Reihen. Beide Folgen $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(\sigma_l)_{l=0}^{\infty}$ sind monoton wachsend.
Weiterhin gilt:

- $\left(\sum_{k\to\infty}(a_k)\right).konvergiert()\Leftrightarrow((s_n)).istBeschränkt()$,
- $\left(\sum_{k\to\infty}(2^m\cdot a_{2^m})\right).konvergiert()\Leftrightarrow((\sigma_n)).istBeschränkt()$ sowie
- $s_{2^{l+1}-1}=\underbrace{a_1}_{=1\cdot a_1}+\underbrace{(a_2+a_3)}_{\leqslant 2\cdot a_2}+\underbrace{(a_4+\ldots+a_7)}_{\leqslant 4\cdot a_4}+\ldots+\underbrace{(a_{2^l}+\ldots+a_{2^{l+1}-1})}_{\leqslant 2^l\cdot a_{2^l}}\geqslant\sigma_l$

Daraus folgt:

$$s_{2^l}=\underbrace{a_1}_{\geqslant\frac{1}{2}\cdot a_1}+\underbrace{a_2}_{=1\cdot a_2}+\underbrace{(a_3+a_4)}_{\geqslant 2\cdot a_4}+\underbrace{(a_5+\ldots+a_8)}_{\geqslant 4\cdot a_8}+\ldots+\underbrace{(a_{2^{l-1}+1}+\ldots+a_{2^l})}_{\geqslant 2^{l-1}\cdot a_{2^l}}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\cdot(a_1+2\cdot a_2+4\cdot a_4+\ldots+2^l\cdot a_{2^l})$$

$$\Rightarrow\left((s_n)_{n=1}^{\infty}\right).istBeschränkt()\Leftrightarrow\left((\sigma_l)_{l=0}^{\infty}\right).istBeschränkt()$$

Satz: Beispiele konvergenter und divergenter Reihen

$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(q^k)\right).konvergiert()\Leftrightarrow(|q|<1)$ (Im Fall der Konvergenz ist $\sum_{k=0}^{\infty}(q^k)=\frac{1}{1-q}$)

Beweis

Bereits bekannt ist: Wir wissen,

- $\forall(q\neq 1):\left(s_n=\sum_{k=0}^{n}(q^k)=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ beziehungsweise
- $\forall(q=1):(s_n=n+1)$

$\Rightarrow\exists\left(\lim_{n}^{\infty}(s_n)\right)\Leftrightarrow(|q|<1)$. In diesem Fall gilt: $\lim_{n\to\infty}(s_n)=\frac{1}{1-q}$

Satz: **Beispiele konvergenter und divergenter Reihen**

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\right).konvergiert()\Leftrightarrow(\alpha>1)$$

Beweis

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\right).konvergiert()$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Verdichtungssatz}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^m\cdot\frac{1}{2^{m\cdot\alpha}}\right)=\underbrace{\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\left(2^{1-\alpha}\right)^m\right)\right)}_{\text{geometrische Reihe mit } q=2^{1-\alpha}}.konvergiert()$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{vorheriger Satz}}2^{1-\alpha}<1$$

$$\Rightarrow 2^1<2^{\alpha}$$

$$\Rightarrow 1<\alpha$$

Satz: **Beispiele konvergenter und divergenter Reihen**

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k\cdot(\log_2(k))^{\alpha}}\right)\right).konvergiert()\Leftrightarrow(\alpha>1)$$

Beweis

$$\sum_{k}^{\infty}\left(\frac{1}{k\cdot(\log_2(k))^{\alpha}}\right)\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Verdichtungssatz}}\left(\sum_{m}^{\infty}\left(2^m\cdot\frac{1}{2^m\cdot m^{\alpha}}\right)=\sum_{m}^{\infty}\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right).konvergiert()\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Vorheriger Satz}}\alpha>1$$

Konvergenzkriterien, die auf Vergleich mit geometrischen Reihen beruhen

Satz: **Wurzelkriterium**

$$\exists(n_0\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant n_0):\left(\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant q<1\right)\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut()$$

Beweis

Nach Voraussetzung ist $\exists(n_0\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant n_0):(|a_n|\leqslant q^n)$. Weiterhin wissen wir, dass

$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(q^n)\right).konvergiert()$, da $0 \leqslant q < 1$. Dann folgt aus dem Vergleichskriterium, dass $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|)\right).konvergiert()$.

Satz: **Wurzelkriterium**

$$(\text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) : \left(\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).divergiert()$$

Beweis

Aus der Voraussetzung folgt: $(\text{für unendlich viele } n) : (|a_n| \geqslant 1)$. Daraus folgt: $\neg\left(a_n \underset{n \to \infty}{\rightarrow} 0\right)$. Damit ist das notwendige Konvergenz-Kriterium verletzt. Daraus folgt: $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).divergiert()$

Satz: **Quotientenkriterium**

Sei $\exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : (a_n \neq 0)$. Dann gilt:

$$\exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut()$$

Beweis

Sei $a_{n_0} \neq 0$ und $\forall(n \geqslant n_0) : (|a_{n+1}| \leqslant q \cdot |a_n|)$. Aus $n = n_0 + k$ folgt:

$$|a_n| = |a_{n_0+k}| \leqslant q \cdot |a_{n_0+k-1}| \leqslant q^2 \cdot |a_{n_0+k+2}| \leqslant \ldots \leqslant q^k \leqslant a_{n_0} = q^n \cdot \underbrace{\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}}_{=:C=const} = C \cdot q^n$$

Aus dem Vergleich mit der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(q^n)$ folgt: $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|)\right).konvergiert()$.

Satz: **Quotientenkriterium**

Sei $\exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : (a_n \neq 0)$. Dann gilt:

$$\exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).divergiert()$$

Beweis

Aus der Voraussetzung folgt: $\exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : (|a_{n+1}| \geqslant |a_n| \geqslant |a_{n-1}| \geqslant \ldots \geqslant |a_{n_0}| \neq 0)$. Daraus folgt, dass das notwendige Konvergenz-Kriterium $\lim_{n \to \infty}(a_k = 0)$ verletzt ist. Also divergiert die Reihe.

Bemerkung

Die Voraussetzung $\exists(n_0 \in \mathbb{N}) : \forall(n \geqslant n_0) : \left(\sqrt[n]{|a_n|} < 1\right)$ beziehungsweise

$\exists(n_0 \in \mathbb{N}): \forall(n \geq n_0): \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1\right)$ reicht nicht aus, um Konvergenz zu garantieren

Gegenbeispiel

Die harmonische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)\right).divergiert()$ (dies ist bekannt). Aber es gilt:

- $\exists(n_0 \in \mathbb{N}): \forall(n \geq n_0): \left(\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1\right)$ und
- $\exists(n_0 \in \mathbb{N}): \forall(n \geq n_0): \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1\right)$

Bemerkung: Spezialfälle

Falls $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)\right)$ beziehungsweise $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)\right)$, dann gilt:

- $(q<1) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut()$
- $(q>1) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).divergiert()$
- $(q=1) \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Beispiel

Wir wissen, dass $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\right).konvergiertAbsolut() \Leftrightarrow (\alpha>1)$. Damit gilt:

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^{\alpha}}}\right) = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)}\right)^{\alpha} = 1$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}\right) = 1$

Bemerkung

Eine andere Formulierung ist:

- $\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut()$
- $\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).divergiert()$
- $\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut()$

- $\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)>1\right)\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).divergiert()$

Bemerkung

Das Wurzelkriterium ist aussagekräftiger als das Quotientenkriterium, das heißt etwa im Spezialfall:

$\exists\left(q:=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)\right)$ (Dies ist bekannt aus dem Satz von Stolz)

Daraus folgt: $\exists\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)\right)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)=q\right)$

Das heißt: falls das Quotientenkriterium eine Konvergenzaussage liefert, dann liefert das Wurzelkriterium die selbe Aussage.

Beispiel

$$\left(\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{2+(-1)^n}{2^n}\right)}_{a_n}=\frac{3}{1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\leqslant\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\frac{\sqrt[n]{3}}{2}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}\right)$$

Das heißt: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{2}\right)$. Daraus folgt absolute Konvergenz.

Aber: $\frac{a_{2\cdot n}}{a_{2\cdot n-1}}=\frac{3}{2},\frac{a_{2\cdot n+1}}{a_{2\cdot n}}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$.

Das heißt: $\neg\exists\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$.

Daraus folgt: Es ist keine Aussage möglich.

Es existiert ein Skript von „Christoph Wagner“, Medizinische Informatik, 22. Oktober 1998

Wiederholung

- $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolution \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|).konvergiert()$
- $\forall(x):(x.konvergiertAbsolut() \Rightarrow x.konvergiert())$
- $(\text{für fast alle } n\in\mathbb{N}):\left(\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant q<1\right)\Rightarrow\left(\sum_{k\to\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut()$
- $(\text{für fast alle } n\in\mathbb{N}):\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q<1\right)\Rightarrow\left(\sum_{k\to\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut()$

Beispiel

$$\forall(x\in\mathbb{R}):\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)}_{a_k}=\underbrace{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots}_{=e^x}\right)$$

Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty}\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{|x|}{k}\right)=0<1$

$$\Rightarrow\forall(x\in\mathbb{R}):\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)\right).konvergiertAbsolut()\right)$$

3.3 Alternierende Reihen und Unordnung von Reihen

Definition: alternierend

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ h eißt **alternierend**, wenn je zwei aufeinanderfolgende Reihenglieder verschiedene Vorzeichen haben. Das heißt:

$$\forall(k\in\mathbb{N}):\left((a_k=(-1)^k\cdot|a_k|)\vee(a_k=(-1)^{k+1}\cdot|a_k|)\right)$$

Beispiel: alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\ldots$$

Satz: Leibnitzkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ eine alternierende Reihe, so dass $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$ eine monotone Nullfolge ist. Dann konvergiert diese Reihe.

Bemerkung

Es genügt für die Konvergenz, dass die Reihenglieder erst ab einem gewissen Index

alternierende Vorzeichen haben und begtragsmäßig monoton fallen. (Änderung endlich vieler Reihenflieder ändert das Konvergenzverhalten nicht.)
(Die Bedingung $\lim_{k\to\infty}(|a_k|)=0$ ist das notwendige Konvergenz-Kriterium.)

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_1>0$.
($(a_1=0)\Rightarrow(\forall(k):(a_k=0))\Rightarrow\left(\left((a_k)_{k=1}^{\infty}\right).konvergiert()\right)$, für $a_1<0$ geht der Beweis analog)
Insbesondere sei:

- $a_1\geqslant a_3\geqslant a_5\geqslant\ldots\geqslant 0$
- $a_2\leqslant a_4\leqslant a_6\leqslant\ldots\leqslant 0$

Sei $s_n:=\sum_{k=1}^{n}(a_k)$ die n-te Partialsumme.
Zu zeigen ist:
a) $(s_{2\cdot n})$ ist monoton wachsend.
b) $(s_{2\cdot n-1})$ ist monoton fallend.
c) Beide Folgend sind beschränkt.

Daraus würde folgen:
$$\exists\left(\lim_{n\to\infty}(s_{2\cdot n})=:s\right)\wedge\exists\left(\lim_{n\to\infty}(s_{2\cdot n-1})\right)$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(s_{2\cdot n-1})=\lim_{n\to\infty}(s_{2\cdot n}-a_{2\cdot n})=\lim_{n\to\infty}(s_{2\cdot n})-\underbrace{\lim_{n\to\infty}(a_{2\cdot n})}_{=0}=s$$
$$\Rightarrow\exists\left(\lim_{n\to\infty}(s_n)\right)$$

Teilbeweis a)

$$s_{2\cdot n+2}=s_{2\cdot n}=\underbrace{\underbrace{a_{2\cdot n+1}}_{\geqslant 0}+\underbrace{a_{2\cdot n+2}}_{\leqslant 0}}_{\geqslant 0}\geqslant s_{2\cdot n}$$

Teilbeweis b)

$$s_{2\cdot n+1}=s_{2\cdot n-1}+\underbrace{a_{2\cdot n}+a_{2\cdot n+1}}_{\leqslant 0}\leqslant s_{2\cdot n-1}$$

Teilbeweis c)

$$\underbrace{s_2}_{\substack{\text{untere Schranke}\\\text{für alle Partialsummen}}}\underbrace{\leqslant}_{(s_{2\cdot n}).istMonotonWachsend()}s_{2\cdot n}=s_{2\cdot n-1}+\underbrace{a_{2\cdot n}}_{\leqslant 0}\underbrace{\leqslant}_{(s_{2\cdot n-1}).istMonotonFallend()}s_{2\cdot n-1}\leqslant\underbrace{s_1}_{\substack{\text{obere Schranke}\\\text{für alle Partialsummen}}}$$

Beispiel

$$\forall(\alpha>0):\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k^{\alpha}}\right)\right).konvergiert()\right)\text{ aber }\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\right).konvergiert()\Leftrightarrow(\alpha>1).$$

Das heißt:

$$\forall(0<\alpha\leqslant 1):\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\right).konvergiert()\right), \text{ aber } \forall(0<\alpha\leqslant 1):\left(\neg\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\right).konvergiertAbsolut()\right)$$

Definition: Umordnung

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)$ heißt Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$, falls eine Bijektion $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ existiert mit $\forall(k\in\mathbb{N}):(b_k=a_{\varphi(k)})$.

Beispiel

$\sum_{K=1}^{\infty}(a_k)1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\ldots$ (alternierende harmonische Reihe)

$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\pm\ldots$ (Umordnung derart, dass nach dem n-ten positiven Reihenglied der Ursprünglichen Folge (wobei $n=0$ das erste Reihenglied bezeichnet) genau 2^n negative Reihenglieder kommen)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)=\underbrace{\underbrace{1}_{1\,\text{pos}}\underbrace{-\frac{1}{2}}_{1\,\text{neg}}}_{0.\ \text{Schritt}}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{1\,\text{pos}}\underbrace{-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}_{2\,\text{neg}}}_{1.\ \text{Schritt}}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}}_{1\,\text{pos}}\underbrace{-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}}_{4\,\text{neg}}}_{2.\ \text{Schritt}}\pm\ldots+\underbrace{\underbrace{\ldots}_{1\,\text{pos}}\underbrace{-\ldots}_{2^n\,\text{neg}}}_{n.\ \text{Schritt}}\pm\ldots$$

Beispiel

Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiert()$ nach Leibnitzkriterium, ihre Summe $s\in\mathbb{R}$.

$$s=\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{\geqslant 0}\pm\ldots+\underbrace{\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}}_{\geqslant 0}\pm\ldots\geqslant\frac{1}{2}$$

$s_n:=\sum_{k=1}^{n}(a_k)$ (Bez. [?])

- $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)=\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}+\ldots$

Für Partialsummen gilt:

- $\sigma_{3\cdot n}:=\sum_{k=1}^{3\cdot n}(b_k)=\frac{1}{2}\cdot s_{2\cdot n}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}\cdot s$
- $\lim_{n\to\infty}(\sigma_{3\cdot n+1})=\underbrace{\lim_{n\to\infty}(\sigma_{3\cdot n})}_{=\frac{s}{2}}+\underbrace{\lim_{n\to\infty}(b_{3\cdot n+1})}_{=0}=\frac{s}{2}$
- analog: $\lim_{n\to\infty}(\sigma_{3\cdot n+2})=\frac{s}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\sigma_n)=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)=\frac{s}{2}$$

(Die Reihe konvergiert, aber gegen eine andere Summe)

- $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)\right)$ ist nicht konvergent, da sie die Abschnitte

  $$\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{4}}\;,\quad \underbrace{-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}_{\left|-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right|\geqslant\underbrace{2}_{\text{Anzahl der Summanden}}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}}\;,\quad \underbrace{-\frac{1}{8}-\ldots-\frac{1}{14}}_{\left|-\frac{1}{8}-\ldots-\frac{1}{14}\right|\geqslant\underbrace{4}_{\text{Anzahl der Summanden}}\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}}\;,\ldots$$

  enthält.

  $\Rightarrow$ Die Reihe enthält unendlich viele Abschnitte vom Betrag $\geqslant\frac{1}{4}$

  $\Rightarrow$ Das Cauchy-Kriterium ist verletzt.

  $\Rightarrow$ Reihe ist divergent

Bemerkung

Bei gewissen Reihen kann man durch Umordnen die Summe ändern oder sogar das Konvergenzverhalten (Das heißt: Eine Reihe ist keine Summe mit unendlich vielen Summanden)

Definition: unbedingt konvergent

Eine Reihe heißt **unbedingt konvergent**, wenn alle ihre Umordnungen gegen die selbe Summe konvergieren.

Definition: bedingt konvergent

Eine Reihe heißt **bedingt konvergent**, wenn sie zwar konvergiert, aber nicht unbedingt konvergiert.

Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$ ist bedingt konvergent.

Satz: Kleiner Umordnungssatz

Eine Reihe ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.

Beweis

Zu zeigen ist

a) $\left(\sum_{k}^{\infty}(a_k)\right).istAbsolutKonvergent()\Rightarrow\left(\sum_{k}^{\infty}(a_k)\right).istUnbedingtKonvergent()$

b) $\neg\left(\left(\sum_{k}^{\infty}(a_k)\right).istAbsolutKonvergent()\right)\Rightarrow\neg\left(\left(\sum_{k}^{\infty}(a_k)\right).istUnbedingtKonvergent()\right)$

Teilbeweis a)

Sei $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).istAbsolutKonvergent()$, $s:=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ sei ihre Summe, $s_n:=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ sei ihre n-te Partialsumme.
Sei außerdem $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{\varphi(k)})$ eine beliebige Umordnung, wobei $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion ist.

Genau zu zeigen ist also:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(a_k)}_{s_n}-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(a_{\varphi(k)})}_{\sigma_n}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(s_n\underset{n\to\infty}{\to}s\right)$$

$$\Rightarrow\left(\sigma_n-s_n\underset{n\to\infty}{\to}0\right)$$

$$\begin{array}{ll} & \left(s_n\underset{n\to\infty}{\to}s\right)\\ + & \left(\sigma_n-s_n\underset{n\to\infty}{\to}0\right)\\ = & \left(\sigma_n\underset{n\to\infty}{\to}s\right)\end{array}$$

Sei $\epsilon>0$ beliebig gegeben.
Aus dem Cauchy-Kriterium und $\left(\sum_{k}^{\infty}(|a_k|)\right).istKonvergent()$ folgt:

$$\exists(m\in\mathbb{N}):\forall(n\geqslant m=m(\epsilon)):\left(\sum_{k=m}^{n}(|a_k|)\epsilon\right)$$

φ ist bijektiv, also

$$\exists(k_1):(\varphi(k_1)=1)$$
$$\exists(k_2):(\varphi(k_2)=1)$$
$$\vdots$$
$$\exists(k_m):(\varphi(k_m)=1)$$

Man setze $M:=\max(\{k_1,\ldots,k_m\})$. Dann ist klar: $M\geqslant m$ (da $k_1,\ldots,k_m$ paarweise verschiedene natürliche Zahlen sind)
Wir setzen für $n\geqslant M=M(\epsilon)$:

$$N:=\max(\{\varphi(1),\ldots,\varphi(n)\})$$

$$\Rightarrow\forall(n\geqslant\underbrace{M}_{m\leqslant M}):(|s_n-\sigma_n|)\leqslant\sum_{k=m+1}^{N}(|a_k|)<\epsilon$$

($a_1,\ldots,a_m$ kommen sowohl in $\sum_{k=1}^{n}(a_k)$ als auch in $\sum_{k=1}^{n}(a_{\varphi(k)})$ vor
$\Rightarrow$ sie heben sich weg, es beleiben nur endlich viele a_k übrig mit Index $\geqslant m+1$, wende darauf Dreiecksungleichung a_n)

Teilbeweis b)

Sei $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).istKonvergent()$, aber nicht $\neg\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).istAbsolutKonvergent()$.

Dann „zerlege“ die Reihe in zwei Reihen:

$$b_k := \begin{cases} a_k & \text{falls } a_k \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } a_k \geqslant 0 \\ a_k & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_k = b_k - c_k) \wedge (|a_k| = b_k - c_k)$$

Datum: 20.05.2003

Wiederholung

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ konvergiert

- absolut, falls $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|)\right).konvergiert()$
- unbedingt, falls jede Umordnung gegen dieselbe Summe konvergiert

Satz

Eine Reihe konvergiert absolut genau dann, wenn sie unbedingt konvergiert.

Beweis

Teilbeweis 0

Die Hinrichtung „Wenn eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert sie unbedingt.“ wurde bereits gezeigt.

Teilbeweis 1

Jetzt zeigen wir „Wenn eine Reihe unbedingt konvergiert, dann konvergiert sie absolut.“

Behauptung

(Kontraposition)

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiert()\wedge\neg\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertAbsolut()$$
$$\Rightarrow\neg\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiertUnbedingt()$$

Das heißt, dass genau zu zeigen ist, dass eine divergierende Umordnung existiert.

Wir „zerlegen“ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ wie folgt:

$$b_k:=\begin{cases}a_k & \text{falls } a_k\geqslant 0\\ 0 & \text{falls } a_k<0\end{cases}$$
$$c_k:=\begin{cases}0 & \text{falls } a_k\geqslant 0\\ -a_k & \text{falls } a_k<0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\forall(k\in\mathbb{N}):(a_k=b_k-c_k)$$
$$\Rightarrow|a_k|=b_k+c_k$$

Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)$ enthalten nur nicht-negative Glieder.

Nach Voraussetzung ist $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|)=\infty$

Wir zeigen jetzt: die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)$ divergieren beide, das heißt: $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)=\infty$

Wir beweisen durch Fallunterscheidung

- Fall 1: $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)\right).konvergiert() \wedge \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).konvergiert()$

  Dann gilt:

  $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|)=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k+c_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)$ Diese Reihe konvergiert.

  Also tritt der 1. Fall nicht ein.
- 2. Fall: Eine der beiden Reihen konvergiert, die andere divergiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)\right).konvergiert() \wedge \left(\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)\right).divergiert()$

  Aus den Rechenregeln für Reihen folgt $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)}_{\to b=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)\in\mathbb{R}} -\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)}_{\to\infty}$,

  das heißt $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)=b-\infty=-\infty$.

  Das heißt also, dass $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).divergiert()$. Das heißt, dass der 2. Fall nicht eintritt.

Also gilt: $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)=\infty$

Konstruktion einer divergenten Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$

Idee

Wir nehmen

- zuerst „viele“ positive Glieder (b_k), bis die Summe $\geqslant 1$ ist.
- dann ein negatives Glied (c_k)
- dann wieder viele positive Glieder
- dann ein negatives Glied
- ...

Daraus folgt: Die entstehende Reihe ist keine Cachy-Reihe.

Präzise

Wir definieren:

- $n_1:=\min(\{n\in\mathbb{N}|b_1+\ldots+b_n\geqslant 1\})$ ($\exists(n_1)$, da $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)=\infty$)
- $n_2:=\min(\{n\in\mathbb{N}|(n>n_1)\wedge(b_{n_1+1}+\ldots+b_{n_2}\geqslant 1)\})$
- ...
- $n_j:=\min\left(\left\{n\in\mathbb{N}\middle|(n>n_{j-1})\wedge\left(\sum_{n_{j-1}<k\leqslant n}(b_k)\geqslant 1\right)\right\}\right)$

Umordung

$\underbrace{b_1+\ldots+b_{n_1}}_{\geqslant 1}-c_1+\underbrace{b_{n_1+1}+\ldots+b_{n_2}}_{\geqslant 1}-c_2\pm\ldots$ Diese Reihe ist divergent.

Satz: **Riemannscher Umordnungssatz**

Sei $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).istKonvergent()$, aber $\neg\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)\right).istAbsolutKonvergent()$.

Dann $\forall\left(s\in\left(\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}\right)\right)$ existiert eine Umordung der Reihe, die gegen s konvergiert. (Das heißt: Es existiert eine Bijektion $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{\varphi(k)}\right)=s$)

Beweisidee

Wir im letzten Beweis folgt: $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k)=\infty$

- Fall $s\in\mathbb{R}$:
  - So viele positive Glieder nehmen, bis die Summe erstmalig $\geqslant s$ ist,
  - dann so viele negative Glieder nehmen, bis die Summe erstmalig $<s$ ist,
  - ...

    Das Verfahren bricht nicht ab, wier erhalten eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$, deren Summe $=s$ ist.
- Fall $s=+\infty$:
  Wir nehmen
  - positive Glieder, bis die Summe $\geqslant 1$
  - ein negatives Glied
  - dann positive Glieder bis die Summe $\geqslant 2$ ist.
  - ein negatives Glied
  - ...

Anwendung auf das Produkt von Reihen

Wie könnte man das Produkt zweier (konvergenter) Reihen $\left(\sum_{j=0}^{n}(a_j)\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}(b_j)\right)$ berechnen?

Für unendliche Summen gilt $\left(\sum_{j=0}^{n}(a_j)\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}(b_j)\right)=\sum_{(j=0)\wedge(k=0)}^{n}(a_j\cdot b_k)$ (Diese Summe ist unabhängig von der Summationsreihenfolge).

Wir bilden sämtliche Produkte $\forall(j=0,1,\ldots):\forall(k=0,1,\ldots):(a_j\cdot b_k)$. Das sind abzählbar viele Produkte. Sei $p_0,p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$ eine beliebige Anordnung dieser Produkte.

Problem

Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(p_n)$ stets konvergent? Leider nein.

Problem

Wenn ja, konvergiert die Produktreihe stets gegen $a \cdot b$, wobei $a = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k)$ und $b = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k)$ ist?
Leider nein.

Beispiel 1

möglicher Anordnungen

$$\begin{matrix} p_0 = a_0 \cdot b_0 & p_1 = a_0 \cdot b_1 & p_4 = a_0 \cdot b_2 & p_9 = a_0 \cdot b_3 & \dots \\ p_3 = a_1 \cdot b_0 & p_2 = a_1 \cdot b_1 & p_5 = a_0 \cdot b_2 & p_{10} = a_1 \cdot b_3 & \dots \\ p_8 = a_2 \cdot b_0 & p_7 = a_2 \cdot b_1 & p_6 = a_2 \cdot b_2 & p_{11} = a_2 \cdot b_3 & \dots \\ p_{15} = a_3 \cdot b_0 & p_{14} = a_3 \cdot b_1 & p_{13} = a_3 \cdot b_2 & p_{12} = a_3 \cdot b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Beispiel 2

möglicher Anordnungen (Cauchy-Produkt)

$$\begin{matrix} p_0 = a_0 \cdot b_0 & p_1 = a_0 \cdot b_1 & p_3 = a_0 \cdot b_2 & p_6 = a_0 \cdot b_3 & \dots \\ p_2 = a_1 \cdot b_0 & p_4 = a_1 \cdot b_1 & p_7 = a_0 \cdot b_2 & p_{11} = a_1 \cdot b_3 & \dots \\ p_5 = a_2 \cdot b_0 & p_8 = a_2 \cdot b_1 & p_{12} = a_2 \cdot b_2 & p_{17} = a_2 \cdot b_3 & \dots \\ p_9 = a_3 \cdot b_0 & p_{13} = a_3 \cdot b_1 & p_{18} = a_3 \cdot b_2 & p_{24} = a_3 \cdot b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Satz

Wenn $\left(\sum_{j=0}^{\infty} (a_j)\right).konvergiertAbsolut() \wedge \left(\sum_{j=0}^{\infty} (b_j)\right).konvergiertAbsolut()$, dann konvergiert jede ihrer möglichen Produktreihen gegen $a \cdot b$, wobei $a = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j)$ und $b = \sum_{k=0}^{\infty} (b_k)$

Beweis

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} (p_n)$ eine fest gewählte Produktreihe.
Genau zu zeigen ist: Diese Produktreihe konvergiert absolut (denn dann konvergiert jede ihrer Umordnungen gegen dieselbe Summe, das heißt: jede beliebige Produktreihe).
Daraus würde Folgen: Es existiert eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N}_0^+ \times \mathbb{N}_0^+ \to \mathbb{N}_0^+$ mit $(\varphi(j,k) = n) \Rightarrow (a_j \cdot b_k = p_n)$

Sei $A := \sum_{j=0}^{\infty} (|a_j|)$, $B := \sum_{k=0}^{\infty} (|b_k|)$.
Also sei:

$\varphi(j_0, k_0) = 0$
$\varphi(j_1, k_1) = 1$
$\varphi(j_2, k_2) = 2$
$\vdots$
$\varphi(j_N, k_N) = N$

Zu gegebenen $N \in \mathbb{N}$ sei $m := \max(\{j_0, \ldots, j_N, k_0, \ldots, k_N\})$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} (|p_n|) \leqslant \sum_{(j=0)\wedge(j=0)}^{m} (|a_j \cdot b_k|) = \sum_{j=0}^{m} (|a_j|) \cdot \sum_{k=0}^{m} (|b_k|) \leqslant A \cdot B$$

$\Rightarrow$ Die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} (|p_n|)$ sind beschränkt (durch $A \cdot B$ right), das heißt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} (|p_n|)\right).konvergiert()$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} (p_n)\right).konvergiertAbsolut()$$

Die Produktreihe aus Beispiel 1 ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (p_n) = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{(j=0)\wedge(k=0)}^{m} (a_j \cdot b_k)\right) = \lim_{m \to \infty} \left(\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} (a_j)\right)}_{\to a} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m} (b_k)\right)}_{\to b}\right) = a \cdot b$$

Folgerung

Für absolut konvergente Reihen konvergiert das Cauchy-Produkt gegen das Produkt der Summen der beiden Reihen, das heißt:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} (a_j)\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (b_k)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\forall(j):\forall(k):(j+k=n)} (a_j \cdot b_k)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} (a_j \cdot b_{n_j})\right)$$

(Summe über die Produkte der n-ten Diagonale)

Beispiel

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k)$ die alternierende Reihe mit $a_0 = 1$, $\forall (k = 1,2,\ldots) : \left(a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.

Aus dem Leibnitz-Kriterium folgt die Konvergenz dieser Reihe. Das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst divergiert jedoch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot a_{n-k})}_{=c_n}\right)$$, dabei ist

$$c_{2\cdot n} = \underbrace{a_0 \cdot a_{2\cdot n}}_{\text{beide} \geqslant 0} + \underbrace{a_1 \cdot a_{2\cdot n-1}}_{\text{beider} \leqslant 0} + \ldots + \underbrace{a_n \cdot a_n}_{\text{kleinster Summand}} + \ldots + a_{2\cdot n} \cdot a_0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot n - 1}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{kleinster Summand}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}$$

$$\Rightarrow c_{2\cdot n} \geqslant (2\cdot n + 1) \cdot \frac{1}{n} \geqslant 2$$

Bemerkung

(ohne Beweis)

Es gilt auch $\left(\sum_{j=0}^{\infty}(a_j)\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}(b_k)\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(a_j\cdot b_k)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(a_j\cdot b_k)\right)$

Beispiel für das Cauchy-Produkt

Wir wissen $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots=e^x$ konvergiert absolut $x\in\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
e^x\cdot e^y &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x^j}{j!}\right)\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y^k}{k!}\right)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n!}\cdot\sum_{\forall(j):\forall(k):(j+k=n)}\left(\underbrace{\frac{n!}{j!\cdot k!}}_{=\frac{n!}{j!\cdot(n-j)!}=\binom{n}{j}}\cdot x^j\cdot y^k\right)}_{=\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\cdot x^j\cdot y^{n-j}\right)=(x+y)^n\text{ (binomische Formel)}}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(x+y)^n}{n!}\right)\\
&= e^{x+y}
\end{aligned}
$$

Datum: 22.05.2003

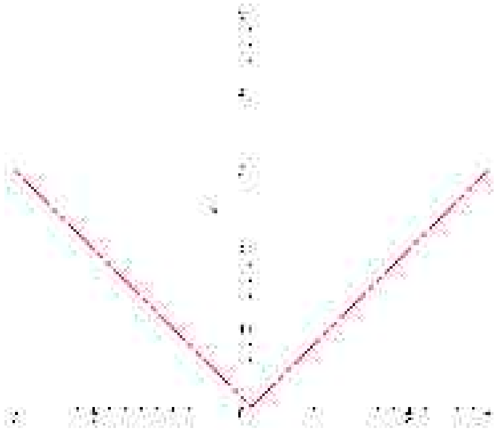
4. Elementare Funktionen

4.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Definition: reelle Funktion

Eine **reelle Funktion** (einer reellen Variablen) ist eine eindeutige Abbildung einer nichtleeren Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ nach R, $f: D \to \mathbb{R}$. Dabei heißen

- $D_f = D$ **Definitionsbereich** von f,
- $R_f := \{ f(x) | x \in D \}$ **Wertebereich** von f,
- $G_f := \{ (x, f(x)) | x \in D \} \subseteq \mathbb{R}^2$ **Graph** von f.

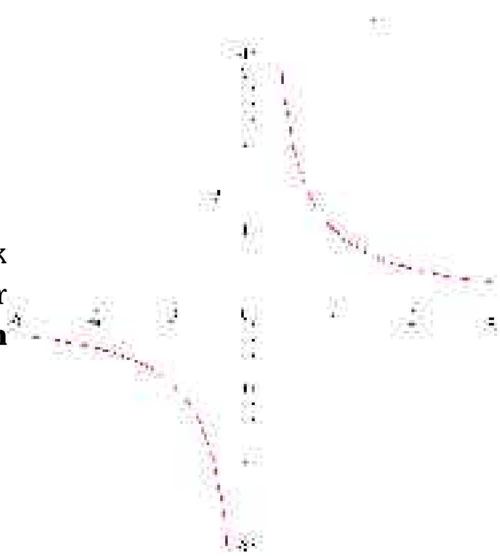


Beispiel

$\forall (x \in \mathbb{R}) : (f(x) = |x|)$

Beispiel

$$\forall \left(x \in D := \{ x \in \mathbb{R} | x \neq 0 \} = R_f \right) : \left(f(x) = \frac{1}{x} \right)$$



Beispiel: Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{C} \\ 0 & x \notin \mathbb{C} \end{cases}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \{0,1\}$$

Bemerkung: natürlicher Definitionsbereich

Wenn eine Funktion f durch einen analytischen Ausdruck gegeben ist, dann nennt man die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die der analytische Ausdruck sinnvoll ist, den **natürlichen Definitionsbereich** von f.

Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - \sqrt{x+2}}$$

- $\sqrt{x+2}$ ist definiert für $x \geqslant -2$
- Der Nenner ist genau dann 0, wenn $x = 2$

Daraus ergibt sich ein natürlicher Definitionsbereich $D_f = [-2, 2[\cup]2, \infty[$

Beispiel

$$g(x) = \sqrt[4]{|x| + \frac{1}{x}}$$

- Die Funktion ist definiert genau dann, wenn der Radikant $|x|+\frac{1}{x}\geqslant 0$
- Das gilt $\forall(x>0)$, $\frac{1}{x}$ ist undefiniert für $x=0$
- [...]
- $D_g=]-\infty,-1]\cup]0,\infty[$ ist der natürliche Definitionsbereich

Definition: Relationen zwischen Funktionen, Operationen mit Funktionen

Seien $f:D\to\mathbb{R}$, $g:D\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen (mit dem selben Definitionsbereich).

- Relationen
  - $(g<g)=_{\text{Def}}(\forall(x\in D):(f(x)<g(x)))$
  - $(g\leqslant g)=_{\text{Def}}(\forall(x\in D):(f(x)\leqslant g(x)))$
  - $(f=g)=_{\text{Def}}(\forall(x\in D):(f(x)=g(x)))$
  - $(f\geqslant g)=_{\text{Def}}(\forall(x\in D):(f(x)\geqslant g(x)))$
  - $(f>g)=_{\text{Def}}(\forall(x\in D):(f(x)>g(x)))$
- Operationen
  - $\forall(x\in D):((f+g)(x)=_{\text{Def}}f(x)+g(x))$
  - $\forall(x\in D):((f-g)(x)=_{\text{Def}}f(x)-g(x))$
  - $\forall(x\in D):((f\cdot g)(x)=_{\text{Def}}f(x)\cdot g(x))$
  - $\forall(x\in D):\left((g(x)\neq 0)\Rightarrow\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)=_{\text{Def}}\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right)$
  - $\forall(x\in D):\forall(\lambda\in\mathbb{R}):((\lambda\cdot f)(x)=_{\text{Def}}\lambda\cdot f(x))$
  - $\forall(x\in D):((|f|)(x)=_{\text{Def}}|f(x)|)$

Definition: Hintereinanderausführung, Komposition

Die **Hintereinanderausführung** („**Komposition**“) zweier Funktionen f und g ist die Funktion $f\circ g$ mit $\forall(x\in D_g):((f\circ g)(x)=_{\text{Def}}f(g(x)))$, falls $R_g\subseteq D_f$.

Definition: Umkehrfunktion

Wenn $f:D_f\to R_f$ bijektiv ist, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}:R_f\to D_f$ definiert durch $\forall(x\in D_f):\forall(y\in D_f):((f(x)=y)\Rightarrow(f^{-1}(y)=x))$

Bemerkung

Die Menge aller Funktionen $f:D\to\mathbb{R}$ (auf D) ist ein reeller Vektorraum bezüglich der Operationen Addition ($f+g$) und Skalarmultiplikation ($\lambda\cdot f$).

Bemerkung

$(f\neq g)\Rightarrow\exists(x\in D):(f(x)\neq g(x))$

Bemerkung: Bezeichnungen

Es werden die Bezeichnungen
- f^{-1} für die Umkehrfunktion und
- $\frac{1}{f}$ für die reziproke Funktion

verwendet.

Bemerkung

Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht aus dem Graphen von f durch Spieelung an der Geraden $y=x$.

Beispiel

$f(x)=x^2, \ x \geqslant 0$
Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

Definition: nach oben beschränkt

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, falls exists(x in setR):forAll(x in D): left(f(x) leslant c)

Definition: nach unten beschränkt

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **nach unten beschränkt**, falls exists(x in setR):forAll(x in D): left(f(x) geslant c)

Definition: beschränkt

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkung

[...siehe Benjamin...]

Definition: streng monoton wachsend

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend**, wenn gilt:

$$\forall (x_0 \in D): \forall (x_1 \in D): \left(\left(x_0 < x_1 \right) \Rightarrow \left(f(x_0) < f(x_1) \right) \right)$$

Definition: monoton wachsend

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend**, wenn gilt:
$$\forall (x_0 \in D): \forall (x_1 \in D): \left(\left(x_0 < x_1 \right) \Rightarrow \left(f(x_0) \leqslant f(x_1) \right) \right)$$

Definition: monoton wachsend

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **monoton fallend**, wenn gilt:

$\forall(x_0 \in D) : \forall(x_1 \in D) : \left(\left(x_0 < x_1\right) \Rightarrow \left(f(x_0) \geqslant f(x_1)\right)\right)$

Definition: streng monoton fallend

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton fallend**, wenn gilt:

$\forall(x_0 \in D) : \forall(x_1 \in D) : \left(\left(x_0 < x_1\right) \Rightarrow \left(f(x_0) > f(x_1)\right)\right)$

Bemerkung

- $(f).istStrengMonotonWachsend() \Rightarrow (-f).istStrengMonotonFallend()$
- $(f).istMonotonWachsend() \Rightarrow (-f).istMonotonFallend()$

Satz

Jede stren monoton wachsende Funktion besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1}, die ebenfalls streng monoton wachsend ist.

Beweis

- $f : D_f \to R_f$ ist eine Abbildung <u>auf</u> den Wertebereich von R_f
- f ist eindeutig:
  Sei $x_0, x_1 \in D$, $x_0 \neq x_1$. Dann gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $x_0 < x_1$
  Aus der strengen monotonie der Funktion f folgt:
  $y_0 := f(x_0) < f(x_1) =: y_1$
  $\Rightarrow y_0 \neq x_1$
  $\Rightarrow$ eine Umkehrfunktion $f^{-1} : R_f \to D_f$ existiert.
- f^{-1} ist monoton:
  Seien $y_0, y_1 \in R_f$ mit $y_0 < y_1$.
  Dann $\exists(x_0 \in D_f) : \exists(x_1 \in D_f) : \left(\left(f(x_0) = y_0\right) \wedge \left(f(x_1) = y_1\right)\right)$ (Es ist klar, dass $x_0 \neq x_1$)
  Nehmen wir an, dass $x_0 > x_1$. Dann würde daraus folgen: $y_0 = f(x_0) > f(x_1) = y_1$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.
  Also gilt: $f^{-1}(x_0) = x_0 < x_1 = f^{-1}(y_1)$. Das heißt, dass $(f^{-1}).istStrengMonotonWachsend()$

Definition: konvex

Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn gilt:
$\forall(x_0 \in D) : \forall(x_1 \in D) : \forall\left(\lambda \in]0,1[\right) :$
$\left(\left(x_\lambda := (1-\lambda) \cdot x_0 + \lambda \cdot x_1 \in D\right) \Rightarrow \left(f(x_\lambda) \leqslant (1-\lambda) \cdot f(x_0) + \lambda \cdot f(x_1)\right)\right)$

Bemerkung

Eine Funktion f ist konvex genau dann, wenn der Graph von f unterhalb jeder Sekante liegt.

Definition: konkav

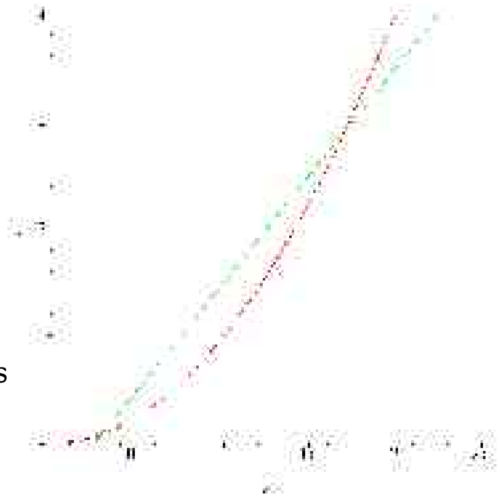
Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn gilt:

$$\forall(x_0 \in D): \forall(x_1 \in D): \forall(\lambda \in]0,1[):$$
$$\left(\left(x_\lambda := (1-\lambda)\cdot x_0 + \lambda \cdot x_1 \in D\right) \Rightarrow \left(f(x_\lambda) \geq (1-\lambda)\cdot f(x_0) + \lambda \cdot f(x_1)\right)\right)$$

Bemerkung

Eine Funktion f ist konkav genau dann, wenn der Graph von f oberhalb jeder Sekante liegt.

Satz

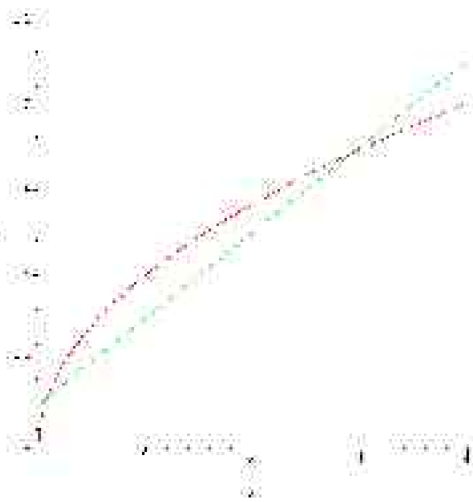


Sei f eine eineindeutige Funktion. Dann gilt:

$$\left((f).istKonvex() \wedge (f).istMonotonWachsend()\right) \Rightarrow$$
$$\left((f^{-1}).istKonvex() \wedge (f^{-1}).istMonotonWachsend()\right)$$

Beweis

Sei f konvex und wachsend.
Daraus folgt (aus dem vorherigen Satz), dass f^{-1} wachsend ist. Noch zu zeigen ist also, dass $(f^{-1}).istKonkav()$
Sei $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1$
$x_\lambda = (1-\lambda)\cdot x_0 + \lambda \cdot x_1$
$f(x_\lambda) = y$



$f(x_\lambda) \leq (1-\lambda)\cdot f(x_0) + \lambda \cdot f(x_1)$
Nach Definition von f^{-1} gilt: $x_0 = f^{-1}(y_0), x_1 = f^{-1}(y_1)$
$\Rightarrow f(x_\lambda) \leq (1-\lambda)\cdot y_0 + \lambda \cdot y_1$ (f^{-1} anwenden)
$\Rightarrow x_\lambda = f^{-1}(f(x_\lambda)) \leq f^{-1}((1-\lambda)\cdot y_0 + \lambda \cdot y_1)$ (f^{-1} ist monoton wachsend)
$\Rightarrow x_\lambda = (1-\lambda)\cdot f^{-1}(y_0) + \lambda \cdot f^{-1}(y_1)$
$\Rightarrow$ f^{-1} ist konkav

Satz

Sei f eine eineindeutige Funktion. Dann gilt:

$$\left((f).istKonvex() \wedge (f).istMonotonFallend()\right) \Rightarrow$$
$$\left((f^{-1}).istKonvex() \wedge (f^{-1}).istMonotonFallend()\right)$$

Beweis

Analog.

Satz

Sei f eine eineindeutige Funktion. Dann gilt:

$\left((f).istKonkav() \wedge (f).istMonotonWachsend()\right) \Rightarrow$
$\left((f^{-1}).istKonkav() \wedge (f^{-1}).istMonotonWachsend()\right)$

Beweis

Analog.

Satz

Sei f eine eineindeutige Funktion. Dann gilt:
$\left((f).istKonkav() \wedge (f).istMonotonFallend()\right) \Rightarrow$
$\left((f^{-1}).istKonkav() \wedge (f^{-1}).istMonotonFallend()\right)$

Beweis

Analog.

Satz

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f nach oben beschränkt und nimmt das Maximum in a oder b an.

Beweis

Sei $x \in]a,b[$ beliebig, dann existiert ein $\lambda \in]0,1[$ mit $x=(1-\lambda)\cdot a+\lambda\cdot b$. Aus der Konvexität von f folgt: $f(x) \leqslant \underbrace{(1-x)\cdot f(a)}_{\leqslant C:=\max(\{f(a),f(b)\})} + \underbrace{\lambda\cdot f(b)}_{\leqslant C} \leqslant C$

Bemerkung

Wenn f nicht konstant ist, dann gilt $\forall (x \in]a,b[)$ sogar $\left(f(x) < \max(\{f(a),f(b)\})\right)$.
Anmerkung:

- $f(a)=f(b)=f(x_0)$ mit $x \in]a,b[$
- Jedes $x \in]a,b[$ lässt sich schreiben als konvexe Linearkombination von a und x_0 beziehungsweise x_0 und b.

Bemerkung

Später zeigen wir: Jede konvexe Funktion auf $[a,b]$ ist auch nach unten beschränkt.

Bemerkung

Analog gilt: Konkave Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sind nach unten beschränkt.

Datum: 27. Mai 2003

[...nicht anwesend wegen Schlafbedarf, Mitschrift bei Benjamin...]
<import from="Dietlind Zühlke">

Satz

Jede streng monoton wachsende Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1}, die ebenfalls streng monoton wachsend ist.

Beweis

- $f: D_f \to R_f$
- f ist eindeutig: Sei $x_{0,} x_1 \in D$ mit $x_0 \neq x_1$ und (ohne Beschänkung der Allgemeinheit) $x_0 < x_1$.
- Aus der strengen Monotonie folgt: $y_0 := f(x_0) < f(x_1) =: y_1$
  $\Rightarrow y_0 \neq y_1$
- Daraus folgt, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}: R_f \to D_f$ existiert.

Eigenschaft: Monotonie

Die Umkehrfunktion ist Monoton

Beweis

Seien $y_0, y_1 \in R_f$ mit $y_0 < y_1$.
$\Rightarrow \exists (x_0, x_1 \in D_f): \left(\left(f(x_0) = y_0 \right) \wedge \left(f(x_1) = y_1 \right) \wedge \left(x_0 \neq x_1 \right) \right)$
Nehmen wir an, dass $x_0 > x_1$. Das würde bedeuten, dass $y_0 = f(x_0) > f(x_1) = y$. Das ist ein Widerspruch. Die Annahme ist also falsch.
Damit gilt: $f^{-1}(y_0) = x_0 < x_1 = f^{-1}(y_1)$.
Also ist f^{-1} streng monoton wachsend.

[...oh, das hatten wir schon mal...]
</import>
<import from="Dietlind Zühlke">

4.2 Elementare Funktionen

Definition: Polynom

Polynome (auch genannte „**Polynomfunktion**en", „**ganzrationale Funktion**en") sind Funktionen der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cdot x^k \right) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

Definition: rationale Funktionen

Sind die Funktionen $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome, so ist

$\forall(x\in\mathbb{R}):\left(\left(Q(x)\neq 0\right)\Rightarrow\left(f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\right)\right)$ eine **rationale Funktion**.

Definition: algebraische Funktion

Die Funktion $y=f(x)$ ist eine **algebraische Funktion**, falls Polynome $P_0,\ldots,P_n$ existieren, sodass $\forall(x\in D_f):\left(P_m(x)\cdot y^m+P_{m-1}(x)\cdot y^{m-1}+\ldots+P_1(x)\cdot y+P_0(x)=0\right)$. Gilt dies, so sagt man, $y=f(x)$ „genüge einer polynomialen Gleichung".

Beispiel

Sei die Funktion $\forall(-2\leqslant x\leqslant 2):\left(y=f(x)=\sqrt{4-x^2}\right)$ gegeben.
Dann gilt: $y^2+x^2-4=0$. Die einzelnen darstellenden Polynome sind:

- $P_2(x)=1$
- $P_1(x)=0$
- $P_0(x)=x^2-4$

Definition: Potenzfunktion

Eine Funktion $f(x)$ heißt Potenzfunktion, wenn sie folgender Form ist.
$\forall(\alpha):\forall(x):$

$$\left(\left(\left(\left(\alpha\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(x\in\mathbb{R}\right)\right)\vee\left(\left(-\alpha\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(x\in\mathbb{R}_-^+\right)\right)\vee\left(\left(\alpha\in\mathbb{R}\right)\wedge\left(x\in\mathbb{R}^+\right)\right)\Rightarrow\left(f(x)=x^\alpha\right)\right)\right)$$

Eigenschaft: Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion einer Potenzfunktion $y=f(x)=x^\alpha$ ist $x=g(y)=y^{\frac{1}{\alpha}}$.

Definition: Exponentialfunktion

Eine Funktion der Form $\forall\left(a\in\left(\mathbb{R}\setminus\{1\}\right)\right):\forall(x\in\mathbb{R}):\left(f(x)=a^x\right)$ heißt **Exponentialfunktion** zur Basis a.
[...Grafik...]

Eigenschaften

- $\forall(x\in\mathbb{R}):\left(f(x)>0\right)$
- $\forall(x\in\mathbb{R}):\forall(y\in\mathbb{R}):\left(f(x)\cdot f(y)=f(x+y)\right)$
- $\forall(x\in\mathbb{R}):\forall(y\in\mathbb{R}):\left(f(x)\cdot y=f(x\cdot y)\right)$
- $\forall(a>0):\left(f.istKonvex()\right)$

Beweis

Sei $(x<y)\wedge(0<\lambda<1)$.
Zu zeigen ist: $a^{(1-\lambda)\cdot x+\lambda\cdot y}=f\left(\left(1-\lambda\right)\cdot x-\lambda\cdot y\right)\leqslant(1-\lambda)\cdot f(x)+\lambda\cdot f(y)=(1-\lambda)\cdot a^x+\lambda\cdot a^y$
$\Leftrightarrow\left(a^{\lambda\cdot(y-x)}\leqslant(1-\lambda)+\lambda\cdot a^{y-x}\right)$
Das ist aber erfüllt, denn aus der Bernoullischen-Ungleichung folgt:

$$a^{\lambda\cdot(y-x)}=\left(a^{y-x}\right)^{\lambda}=\underbrace{\left(1+\left(a^{y-x}-1\right)\right)}_{>-1}^{\lambda}\leqslant 1+\lambda\cdot\left(a^{y-x}-1\right)=\left(1-\lambda\right)+\lambda\cdot a^{y-x}$$

- Monotonie:
  - $\forall(a>1):\left(f.istStrengMonotonWachsend()\right)$
  - $\forall(0<a<1):\left(f.istStrengMonotonFallend()\right)$

  Das heißt: $f:\mathbb{R}\rightarrow\left]0,\infty\right[$ ist bijektiv.

Definition: Logarithmus

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $x\mapsto\alpha^{x}$ heißt **Logarithmus**funktion zur Basis a . (Es gilt wieder: $a\in\left(\mathbb{R}^{+}\setminus\{1\}\right)$).

Schreibweise

$\forall(x\in\mathbb{R}^{+}):\left(f(x)=\log_{a}(x)\right)$

Definition: dekadischer Logarithmus

Die Logarithmusfunktion zur Basis $a=10$ heißt **dekadischer Logarithmus**.

Schreibweise

$\log_{10}(x)=\log(x)$

Definition: natürlicher Logarithmus

Die Logarithmusfunktion zur Basis $a=e$ heißt **natürlicher Logarithmus**.

Schreibweise

$\log_{e}(x)=\ln(x)$

Definition: dyadischer Logarithmus

Die Logarithmusfunktion zur Basis $a=10$ heißt **dyadischer Logarithmus**.

Schreibweise

$\log_{2}(x)=\mathrm{ld}(x)$

</import>
<import from=„Christian Wagner“>

Eigenschaften

[Grafik]

- $\log_{a}(a)=1$
- $\log_{a}(1)=0$
- $\log_{a}(x\cdot y)=\log_{a}(x)+\log_{a}(y)$
- $\log_{a}(x^{y})=y\cdot\log_{a}(x)$
- $\forall(a>1):\left(\left(\log_{a}\right).istStrengMonotonWachsend()\wedge\left(\log_{a}\right).istKonvex()\right)$

- $\forall(0<a<1):\left(\left(\log_a\right).istStrengMonotonFallend()\wedge\left(\log_a\right).istKonvex()\right)$

</import>
[,..]

Datum: 03.06.2003

[...wo war ich hier?...]

Datum: 05.06.2003

Wiederholung

Definition: Grenzwert

Gegeben seien $x_0, c \in \mathbb{R}$.
$\lim_{x \to x_0} (f(x)) = c$ ist dann der Fall, wenn für jede Umgebung $U_\epsilon(c) =]c-\epsilon, c+\epsilon[$ eine punktierte Umgebung $\dot{U}_\delta(x_0) =]x_0-\delta, x_0[\cup]x_0, x_0+\delta[$ existiert mit der Eigenschaft $\forall(x \in \mathbb{R}) : ((x \in \dot{U}_\delta(x_0)) \Rightarrow (f(x) \in U_\epsilon(c)))$.

Uneigentliche Grenzwerte

(das heißt: die Sonderfälle $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ und|oder $c \in \{-\infty, +\infty\}$)

Wir ersetzen die Umgebungen von x_0 beziehungsweise c in diesem Fall durch die „Umgebungen"
- $\forall(k \in \mathbb{R}^+) : (]-\infty, -k[)$ von $-\infty$
- $\forall(k \in \mathbb{R}^+) : (]k, +\infty[)$ von $+\infty$

Definition

$$\forall(c \in \mathbb{R}) : \left(\left(\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = c\right) \Leftrightarrow_{\text{Def}} \left(\forall(\epsilon \in \mathbb{R}^+) : \exists(k \in \mathbb{R}^+) : \forall(x > k) : (|f(x) - c| < \epsilon)\right)\right)$$

$$\forall(x_0 \in \mathbb{R}) : \left(\left(\lim_{x \to x_0} (f(x)) = +\infty\right) \Leftrightarrow_{\text{Def}} \left(\forall(k \in \mathbb{R}^+) : \exists(\delta \in \mathbb{R}^+) : \forall(x \in \mathbb{R}) : ((0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) > k))\right)\right)$$

$$\forall(x_0 \in \mathbb{R}) : \left(\left(\lim_{x \to x_0} (f(x)) = -\infty\right) \Leftrightarrow_{\text{Def}} \left(\forall(k \in \mathbb{R}_-) : \exists(\delta \in \mathbb{R}^+) : \forall(x \in \mathbb{R}) : ((0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) < k))\right)\right)$$

Bemerkung

Die Definitionen für $x_0 = -\infty$ und|oder $c = -\infty$ sind analog.

Bemerkung

Für uneigentliche Grenzwerzwerte gelten die selben Rechenregeln wie für eigentliche Grenzwerte, falls die auftretenden Ausdrücke sinnvoll definiert sind in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Beispiel

$\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to \infty} (f(x)) - \lim_{x \to \infty} (g(x))$, falls diese einzelnen Grenzwerte definiert sind und ihre Differenz definiert ist. (Beispielsweise ist $\infty - \infty$ nicht definiert.)

Bemerkung

Auch die Monotonie des Grenzwertes gilt für uneigentliche Grenzwerte

Bemerkung

Die Charakterisierung mittels Folgen gilt ebenfalls.

Beispiel

$\left(\lim_{x\to\infty}(f(x))=c\right)\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty}(x_n)=\infty$ gilt $\lim_{n\to\infty}(f(x_n))=c$.

Beispiel 1

$\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$ (trivial).

Damit folgt aus den Rechenregeln (oder mit der Definition): $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Beispiel 2:

$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$, $\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$

Beispiel 3:

$\neg\exists\left(\lim_{x\to\infty}(\sin(x))\right)$, weil

- Fall $x_n=n\cdot\pi$
  $\lim_{n\to\infty}(x_n)=\infty$, aber $\lim_{n\to\infty}(\sin(x_n))=0$
- Fall $y_n=2\cdot\pi\cdot n+\frac{\pi}{2}$
  $\lim_{n\to\infty}(y_n)=\infty$, aber $\lim_{n\to\infty}(\sin(y_n))=1$

Beispiel 4:

Sei $P(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cdot x^k)=a_n\cdot x^n+\ldots+a_1\cdot x+a_0$ mit $a_n\neq 0$.

Dann folgt (aus Rechenregel und Abschätzung):

$$\lim_{n\to\infty}(P(x))=\begin{cases}+\infty & \text{für } a_n>0\\ -\infty & \text{für } a_n<0\end{cases}$$

$$\left(P(x)=a_n\cdot\underbrace{x^n}_{\to\infty}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\to 0}+\ldots+\underbrace{\frac{a_1}{x^{n-1}}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\to 0}\right)\right)$$

Beispiel 5:

Seien

- $P(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cdot x^k)$ mit $a_n\neq 0$
- $Q(x)=\sum_{k=0}^{m}(b_k\cdot x^k)$ mit $b_m\neq 0$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)=\begin{cases}\frac{a_n}{b_n} & \text{für } n=m\\ 0 & \text{für } n<m\\ +\infty & \text{für } (n>m)\wedge(a_n>0)\\ -\infty & \text{für } (n>m)\wedge(a_n<0)\end{cases}$$

Beispiel 6:

$$\lim_{x\to+\infty}(a^x)=\begin{cases}\infty & \text{für } a>1\\ 1 & \text{für } a=0\\ 0 & \text{für } 0<a<1\end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0+0}\left(a^{\frac{1}{t}}\right)\underbrace{=}_{(x\to\infty)\Leftrightarrow\left(t:=\frac{1}{x}\to 0+0\right)}\lim_{x\to\infty}(a^x)=\begin{cases}\infty & \text{für } a>1\\ 1 & \text{für } a=0\\ 0 & \text{für } 0<a<1\end{cases}$$

5.2 Stetige Funktionen

Definition: stetig

Sei f eine Funktion, die in einer Umgebung von x_0 definiert ist. Dann heißt f **stetig** in x_0, falls $\lim_{x\to x_0}(f(x))=f(x_0)$.

Definition: stetig

Die Funktion f heißt **stetig**, wenn f in jedem Punkt des Definitionsbereiches stetig ist.

Bemerkung

f ist stetig in x_0 genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte existieren und gleich $f(x_0)$ sind.

$$f.istStetigIn(x_0)\Leftrightarrow\left(\lim_{x\to x_0+0}(f(x))=\lim_{x\to x_0-0}(f(x))=f(x)\right)$$

Bemerkung

$$f.istStetigIn(x_0)\Leftrightarrow\left(\forall(\epsilon\in\mathbb{R}^+):\exists(\delta\in\mathbb{R}^+):\left(\left(|x-x_0|<\delta\right)\Rightarrow\left(|f(x)-f(x_0)|\epsilon\right)\right)\right)$$

Bemerkung

Aus der Folgen-Charakterisierung des Grenzwertes ergibt sich:

$f.istStetigIn(x_0)\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to infnity}(x_n)=x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty}(f(x_n))=f(x_0)$

Bemerkung

Die Rechenregeln für Grenzwerte ergeben:

Gilt $(f.istStetigIn(x_0))\wedge(g.istStetigIn(x_0))$, dann sind auch

- $f+g$

- $f-g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ falls $g(x_0) \neq 0$

stetig in x_0.

Bemerkung

Alle elementaren Funktionen sind stetig (das heißt: stetig in jedem Punkt ihres jeweiligen Definitionsbereiches).

Beispiel

$\forall (x_0 \in \mathbb{R}) : \left(\left(f(x) = e^x \right) . istStetigIn \left(x_0 \right) \right)$

Wir wissen schon: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(e^x \right) \underbrace{=}_{\text{Dies ist bekannt}} 1 = e^0 = f(0)$. Das heißt: $f.istStetigIn \left(x_0 = 0 \right)$.

Aus Potenzgesetzen und Rechenregeln für Grenzwerte folgt:

$$\lim_{t \to x_0} \left(f(t) \right) \underbrace{=}_{(t = x + x_0) \Rightarrow (x \to 0)} \lim_{x \to 0} \left(f \left(x + x_0 \right) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\underbrace{e^{x + x_0}}_{= e^x \cdot e^{x_0}} \right) = e^{x_0} \cdot \lim_{x \to 0} \left(e^x \right) = f \left(x_0 \right)$$

Klassifikation der Unstetigkeitsstellen

Wenn eine Funktion f in einem Punkt x_0 unstetig ist, dann gibt es folgende Möglichkeiten

1. Unstetigkeiten erster Art:
   1. „hebbare Unstetigkeit“:
      $\exists \left(\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \right) \right)$, aber $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \right) \neq f \left(x_0 \right)$
   2. „Sprungstelle“:
      Die einseitigen Grenzwerte existieren , sind aber nicht gleich.
      $\exists \left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \left(f(x) \right) \right) \wedge \exists \left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \left(f(x) \right) \right) \wedge \left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \left(f(x) \right) \neq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \left(f(x) \right) \right)$

   Diese Unstetigkeiten werden als „harmlos“ bezeichnet.
2. Unstetigkeiten zweiter Art:
   1. „Unendlichkeitsstelle“, „Polstelle“
      Die einseitigen Grenzwerte existieren, aber mindestens einer ist $+\infty$ oder $-\infty$.
      $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \left(f(x) \right) \in \left\{ -\infty, +\infty \right\} \right) \vee \left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \left(f(x) \right) \in \left\{ -\infty, +\infty \right\} \right)$
   2. „wesentliche Unstetigkeit“
      Mindestestens einer der einseitigen Grenzwerte existiert nicht.
      $\neg \left(\exists \left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \left(f(x) \right) \right) \wedge \exists \left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \left(f(x) \right) \right) \right)$

   Diese Unstetigkeiten werden als „gefährlich“ bezeichnet.

Beispiel

$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \neq 1 \\ 2 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$ [Grafik]

Diese Funktion hat eine hebbare Unstetigkeit bei $x = 2$.

Beispiel

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{wenn } x<1 \\ 2 & \text{wenn } x=1 \\ 3 & \text{wenn } x>1 \end{cases}$$

f ist stetig in allen $x\neq 1$

$$\left(\lim_{x\to 1-0}(f(x)=1)\right)\wedge\left(\lim_{x\to 1+0}(f(x)=3)\right)$$

Beide einseitige Grenzwerte existieren, sind aber verschieden. Also haben wir hier eine Sprungstelle.

Beispiel

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{wenn } x\neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x=0 \end{cases}$$

$$\left(\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty\right)\wedge\left(\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty\right)$$

Das heißt: Beide einseitigen Grenzwerte existieren, sind aber nicht endlich. Also existiert eine Unendlichkeitsstelle bei $x_0=0$. (In allen anderen Punkten $x_0\neq 0$ ist f stetig)

Beispiel

$$f(x)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x\neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x=0 \end{cases}$$

Die Funktion hat eine wesentliche Unstetigkeit in $x_0=0$ (und ist stetig in allen $x_0\neq 0$)

$$\forall(n\in\mathbb{N}):\forall\left(x_n=\frac{1}{n\cdot\pi},\right):\left(\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)}_{=\sin(n\cdot\pi)=0}\right)=0\right)$$

$$\Rightarrow\forall(n\in\mathbb{N}):\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)=0\right)$$

[Grafik]

$$\left(\frac{1}{y_n}=2\cdot n\cdot\pi+\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left(y_n=\frac{1}{n\cdot\left(2\cdot n+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

Es folgt: $\left(\lim_{n\to\infty}(y_n)=0\right)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sin\left(\frac{1}{y_n}\right)}_{=\sin\left(2\cdot\pi\cdot n+\frac{\pi}{2}\right)}\right)=1\right)$

$\Rightarrow \neg \exists \left(\lim_{x \to 0+0} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \right)$

(analog für den linksseitigen Grenzwert)

Beispiel

Die Dirichlet-Funktion $\forall (x \in \mathbb{R}) : \left(f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)$ hat in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ eine wesentliche Unstetigkeit.

Satz

Eine monotone Funktion kann nur Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen haben, und zwar höchstens abzählbar viele.

Beweis

Genau zu zeigen ist: Beide einseitige Grenzwerte existieren (hebbare Unstetigkeitsstellen sind wegen der Monotonie und möglich).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zu zeigen ist:

$\forall (x_0 \in [a, b]) : \left(\exists \left(\lim_{x \to x_0+0} (f(x)) \right) \land \exists \left(\lim_{x \to x_0-0} (f(x)) \right) \right)$

Sei $x \in [a, b]$. Wir betrachten die Menge $M := \{ f(x) | a \leqslant x < x_0 \}$.

M ist beschränkt, da $\forall (x \in M) : \left(f(x) \leqslant \underbrace{f(x_0)}_{\text{obere Schranke}} \right)$

$\Rightarrow \exists (s := \sup(M)) : (s \in \mathbb{R})$

[Grafik]

Zu zeigen ist also nun:

$\lim_{x \to x_0-0} (f(x)) = s$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, also existiert nach der Definition des Supremums ein $x_\epsilon < x_0$ mit $s - \epsilon < f(x_\epsilon) \leqslant s$. Wir setzen $\delta := x_0 - x_\epsilon > 0$.

Für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0[=]x_\epsilon, x_0[$ gilt: $s - \epsilon \leqslant f(x_\epsilon) \underbrace{\leqslant}_{f \text{ ist monoton wachsend}} f(x) \leqslant s$, das heißt $|f(x) - s| < \epsilon$, also $\lim_{x \to x_0-0} (f(x)) = s$.

Analog: Die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes zeigen und die monoton fallende Funktion behandeln.

Datum: 17.06.2003

[...nicht anwesend gewesen...]

Datum: 17.06.2003

Wiederholung

Satz

Sei $I \subseteq R$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist
1. $\exists (f^{-1}) \Leftrightarrow f.istStrengMonoton()$

Beweis

Letzte Vorlesung
2. $\exists (f^{-1}) \Rightarrow (f^{-1}).istStetig()$

Beweis

Für abgeschlossene Intervalle $[a, b]$, also f ist der Form $f : [a, b] \to [c, d]$ und $f.istStetig()$.

Es ex istiere die Umkehrfunktion f^{-1}. Nach 1. ist f streng monoton. f sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit wachsend. Dann ist f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend.
Der Beweis geht indirekt:

- Annahme: f^{-1} sei unstetig in einem Punkt $y_0 \in]c, d[$.
- Daraus, dass f^{-1} monoton ist, folgt, das y_0 eine Sprungstelle ist, das heißt, die einseitigen Grenzwerte $x_1 := \lim_{y \to y_0 - 0} (f^{-1}(y))$ und $x_2 := \lim_{y \to y_0 + 0} (f^{-1}(y))$ (mit $x_1 < x_2$) existieren.
- Sei $y_n := y_0 - \frac{1}{n}$, $z_n = y_0 + \frac{1}{n}$.
- $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (y_n) = \lim_{n \to \infty} (z_n) = y_0$ und $x_1 = \lim_{n \to \infty} (f^{-1}(y_n))$, $x_2 = \lim_{n \to \infty} (f^{-1}(z_n))$
- Aus $f.istStetig()$ folgt: $f(x_1) = \lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{f(f^{-1}(y_n))}_{= y_n} \right) = y_0 = \lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{f(f^{-1}(z_n))}_{= z_n} \right) = f(x_2)$

Bemerkung

1. gilt nicht, wenn der Definitionsbereich von f kein Intervall ist.
[Grafik]

Satz: Zusammensetzung stetiger Funktionen

$(f.istStetigIn(x_0) \wedge g.istStetigIn(y_0 = f(x_0))) \Rightarrow (g \circ f).istStetigIn(x_0)$

Beweis: Folgencharakterisierung der Stetigkeit

Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n \to \infty} (x_n) = x_0$. Dann folgt aus $f.istStetigIn(x_0)$:

- $\underbrace{\lim_{n \to \infty} (f(x_n))}_{= y_n} = \underbrace{f(x_0)}_{= y_0}$
- Aus $g.istStetigIn(y_0)$ folgt:

- $\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{g\left(f\left(x_n\right)\right)}_{\left(g\circ f\right)\left(x_n\right)}\right)=\underbrace{g\left(f\left(x_0\right)\right)}_{\left(g\circ f\right)\left(x_0\right)}$, das heißt: $\left(g\circ f\right).istStetigIn\left(x_0\right)$

5.3 Stetigkeit der elementaren Funktionen

Satz

Alle elementaren Funktionen, also
- Polynome,
- rationale Funktionen,
- Exponentialfunktionen,
- Logarithmusfunktionen,
- Potenzfunktionen,
- trigonometrische Funktionen
- Arcusfunktionen
- Hyperbelfunktionen

sind stetig (in allen Punkten ihres Definitionsbereiches).

Beweis

- die konstante Funktion $f(x)=c=const$ ist stetig.
- $f(x)=x$ (identische Abbildung) ist stetig
- Aus den Rechenregeln für Grenzwerte und stetige Funktionen folgt
  - Polynomfunktionen sind stetig
  - rationale Funktionen sind stetig
- Exponentialfunktion: $f:\mathbb{R}\to]0,\infty[$, $f(x)=a^x$ (mit $\left(a\in\mathbb{R}^+\right)\wedge\left(a\neq 1\right)$)
  - Wir wissen schon $\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{a^x}_{=f(x)}\right)=1=f(0)$, das heißt: $f.istStetigIn\left(x_0=0\right)$.
  - Sei $x_0\in\mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt: $\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\underbrace{a^{\left(x-x_0\right)+x_0}}_{=a^t\cdot a^{x_0}}\right)\underbrace{=}_{t:=x-x_0\to 0}a^{x_0}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\left(a^t\right)}_{=1}=f\left(x_0\right)$ (Hier kamen auch die Rechenregeln für Grenzwerte zur Anwendung)
  - Das heißt, $f.istStetigIn\left(x_0\right)$
- Logarithmusfunktion $f\left(x\right)=\log_a\left(x\right)$ ist stetig als Umkehrfunktion der streng monotonen und stetigen Exponentialfunktion
- trigonometrische Funktionen: vergleiche die Übungsaufgaben
- (allgemeine) Potenzfunktionen: $f:]0,\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=x^\alpha$ (mit $\alpha\in\mathbb{R}$)
  $f(x)=\left(e^{\ln\left(x\right)}\right)^\alpha=e^{\alpha\cdot\ln\left(x\right)}=f_2\left(f_1\left(x\right)\right)$ mit $f_1\left(x\right)=\alpha\cdot\ln\left(x\right)$ und $f_2\left(y\right)=e^y$ und $\left(f_1\right).istStetig()$ und $\left(f_2\right).istStetig()$
  $\Rightarrow f.istStetig()$
- Arcusfunktionen sind als Umkehrfunkten der (stetigen) Winkelfunktionen ebenfalls stetig
- Hyperbelfunktionen $\sinh\left(x\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh\left(x\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, usw.
  sind stetig nach den Rechenregeln für Grenzwerte und der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

6. Differenzierbare Funktionen

6.1 Definition der Ableitung und Rechenregeln

Definition: differenzierbar

Sei $f:]a,b[\in\mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0\in]a,b[$. Dann heißt f **differenzierbar** in x_0, falls der Grenzwert

$$f'(x_0):=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x_0}\right)$$

existiert.

Definition: Ableitung

Die reelle Funktion $f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f in Punkt x_0.

Definition: differenzierbar

f heißt **differenzierbar**, falls f in jedem $x_0\in]a,b[$ differenzierbar ist.

Bemerkung

Eine äquivalente Formulierung ist: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$

Bemerkung: geometrische Deutung

[Grafik]

Der Anstieg d er Sekante (durch $(x_0,f(x_0))$ und $(x,f(x))$) ist $\tan(\alpha)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Differenzenquotient)

„Der Limes der Sekante ist die Tagente“

„Die Ableitung ist der Anstieg der Tangente ist der Grenzwert de Differenzenquotienten“

Bemerkung

Analog zu einseitigen Grenzwerten kann man auch rechts- und sinksseitige Ableitungen definieren:

- $f'_-(x_0):=\lim_{x\to x_0-0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ (Linksseitige Ableitung)
- $f'_+(x_0):=\lim_{x\to x_0+0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ (Rechtsseitige Ableitung)

Wie bei den Grenzwerten gilt:

$\exists(f'(x_0))\Leftrightarrow(\exists(f'_-(x_0))\wedge\exists(f'_+(x_0))\wedge(f'_-(x_0)=f'_+(x_0)))$

Beispiel

$f(x)=|x|$

Es ist klar, dass $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{wenn } x_0<0\\ +1 & \text{wenn } x_0>0\end{cases}$:

- $f'_-=\lim\limits_{x\to 0-0}\left(\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{=\frac{-x}{x}=-1}\right)=-1$
- $f'_+=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{=\frac{x}{x}=1}\right)=1$
- $\Rightarrow\neg\exists(f'(0))$

Ein Grundgedanke der Differenzialrechnung ist die Approximation einer gegebenen („gutartigen“) Funktion in der Umgebung eines Punktes (das heißt: lokal) durch einfachere Funktionen (zum Beispiel lineare Funktionen oder Polynomialfunktionen) (Dies führt zum Satz von Taylor, den wir später behandeln.)

Satz: infinitesimal lineares Verhalten

Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ eine reelle Funktion, $x_0\in]a,b[$. Dann gilt:
f ist differenzierbar in x_0 genau dann, wenn
$\exists(c\in\mathbb{R})\wedge\forall(x\in]a,b[):(f(x)=f(x_0)+c\cdot(x-x_0)+r(x))\wedge\left(\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{r(x)}{x-x_0}\right)=0\right)$ mit $r:]a,b[\to\mathbb{R}$.

In diesem Fall ist $c=f'(x_0)$.
„Man kann sich die Funktion r als „Rest“ vorstellen, der den Fehler zwischen der Sekante durch x_0 mit dem Anstieg c an der Stelle x und der Funktion f an der Stelle x darstellt.“

Beweis

- Hinrichtung:
  Sei $f.istDifferenzierbarIn(x_0)$ und $f'(x_0)=c\in\mathbb{R}$. Dann definiere man die Funktion r durch $r(x):=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.
  $\Rightarrow\frac{r(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\underset{x\to x_0}{\to}f'(x_0)-f'(x_0)=0$
  Also ist $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{r(x)}{x-x_0}\right)=0$
- Rückrichtung:
  Wenn $c\in\mathbb{R}$ und eine Funktion r mit den angegebenen Eigenschaften existiert, dann folgt:
  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=c+\frac{r(x)}{x-x_0}\underset{x\to x_0}{\to}c$
  Das heißt: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=c$

Bemerkung

Ein Vorteil d es „infinitesimal linearen Verhaltens“ ist: Die Übertragung auf höhere Dimensionen ist möglich. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist (total) differenzierbar in x_0, falls eine lineare Abbildung $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit:

- $f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\in\mathbb{R}^m} + \underbrace{A\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\in\mathbb{R}^n}}_{\in\mathbb{R}^m} + r(x)$ und
- $\lim x \to x_0 \left(\frac{\|r(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}} \right) = 0$

Die Beziehung ist: $A = D_f(x)$ ist die totale Ableitung

(Die Ursprüngliche Definition $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ ist sinnlos für $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.)

Satz

$f.istDifferenzierbarIn(x_0) \Rightarrow f.istStetigIn(x_0)$

Beweis

Sei $f(x) = f(x_0) + c\cdot(x-x_0) + r(x)$ (wobei c, r wie im Satz sind).

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x_0) + c\cdot(x-x_0) + r(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x_0)+0+0) = f(x_0)$

Satz: Rechenregeln für die Ableitung

Wenn f, g in x_0 differenzierbar sind, dann sind auch

- $f \pm g$,
- $\lambda\cdot f$,
- $f\cdot g$,
- $\frac{f}{g}$

in x_0 differenzierbar und es gilt:

1. $(f\pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

Beweis

Folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

2. $(\lambda\cdot f)'(x_0) = \lambda\cdot f'(x_0)$

Beweis

Folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

3. $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

Beweis

$$\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=\underbrace{f(x)}_{f(x_0)}\cdot\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{g'(x_0)}+\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\cdot\underbrace{g(x_0)}_{g(x_0)}$$

(Untere Zeile gilt für $x\rightarrow x_0$)
Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt:

$$(f\cdot g)'(x_0)=\lim_{x_0\rightarrow 0}\left(\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}\right)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$ (falls $g(x_0)\neq 0$)

Beweis

Analog zu 3.

Datum: 24.06.2003

Satz: **Kettenregel**

Seien f, g reelle Funktionen, sodass der Wertebereich im Definitionsbereich von f enthalten ist. Wenn $g.istDifferenzierbarIn(x_0) \wedge f.istDifferenzierbarIn(y_0 = g(x_0))$, dann

- $(f \circ g).istDifferenzierbarIn(x_0)$
- $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Beweis

Wir betrachten die Funktion $h(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{wenn } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{wenn } y = y_0 \end{cases}$.

$f.istDifferenzierbarIn(x_0) \Rightarrow \left(\lim\limits_{y \to y_0} (h(y)) = \lim\limits_{y \to y_0} \left(\dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \right) = f'(y_0) = h(y_0) \right)$

$\Rightarrow h.istStetigBei(y_0)$

Außerdem gilt: $\forall (y) : (f(y) - f(y_0) = h(y) \cdot (y - y_0))$

Wir setzen $y = g(x)$, $y_0 = g(y_0)$

$g.istDifferenzierbarBei(x_0) \Rightarrow g.istStetigBei(x_0)$ Das heißt: $(x \to x_0) \Rightarrow (g(x) \to g(x_0))$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(h(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= h\left(\underbrace{g(x_0)}_{y_0} \right) \cdot g(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Bemerkung: **Merkregel**

$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ ($y = y(x) = g(x)$ Substitution [?])

Satz: **Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion**

Sei $f : I \to J$ stetig und $f.istBijektiv()$ (wobei $I, J \in \mathbb{R}$ Intervalle sind) und sei $f.istDiffernzierbarIn(x_0) \wedge (x_0 \in I)$. Dann

- ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I \in y_0 = f(x_0)$ differnzierbar, und es gilt:
- $(f'(x_0) \neq 0) \Rightarrow \left((f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} \right)$

Beweis

Zu zeigen ist: $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}\right)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

Wir nehmen dazu die Folgencharakterisierung des Grenzwertes und anschließend den Kehrwert.

Es genügt also zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{y_n-y_0}{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}\right)=f'(x_0)$ für eine beliebige Folge (y_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)=y_0$.

Sei $\forall(n\in\mathbb{N}_0^+):(x_n=f^{-1}(y_n))$, das heißt: $\forall(n\in\mathbb{N}_0^+):(f(x_n)=y_n)$.

Dann genügt es zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right)=f'(x_0)$. Dies gilt ganz offensichtlich.

6.2 Differentiation der elementaren Funktionen

Satz

Die elementaren Funktionen sind differenzierbar, und es gilt $\forall(x\in\mathbb{R})$: (Zusammenfassung)

1. $\forall(\alpha\in\mathbb{R}):\left((x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}\right)$
2. $(e^x)'=e^x$
3. $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$
4. $(\sin(x))'=\cos(x)$
5. $(\cos(x))'=-\sin(x)$
6. $(\tan(x))'=\frac{1}{(\cos(x))^2}=1+(\tan(x))^2$
7. $(\cot(x))'=\frac{-1}{(\sin(x))^2}=-\left(1+(\cot(x))^2\right)$
8. $(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $(\arccos(x))'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arctan(x))'=\frac{1}{1+x^2}$
11. $(\operatorname{arccot}(x))'=\frac{-1}{1+x^2}$
12. $(\sinh(x))'=\cosh(x)$
13. $(\cosh(x))'=\sinh(x)$
14. $(\tanh(x))'=\frac{1}{(\cosh(x))^2}$

15. $(\coth(x))' = \frac{-1}{(\sinh(x))^2}$

Satz

Die elementaren Funktionen sind differenzierbar, und es gilt $\forall(x \in \mathbb{R})$: (mit Inline-Beweisen)

1. $\forall(\alpha \in \mathbb{R}) : \left((x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}\right)$

Beweis

(Kettenregel benutzen mit $g(x) = \alpha \cdot \ln(x)$, $f(y) = e^y$)

$$x^\alpha = \left(e^{\ln(x)}\right)^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)} = f(g(x))$$

$$\Rightarrow (x^\alpha)' = \underbrace{f'(g(x))}_{g(x)} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\alpha \cdot \frac{1}{x}} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

2. $(e^x)' = e^x$

Beweis

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{x+h} - e^x}{h}\right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}\right) = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = [\text{... abgewischt...}] = e^x \cdot 1 = e^x$$

3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Beweis

Sei $y = \ln(x)$, das heißt $e^y = x$ (der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion)

$$\Rightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = x$$

4. $(\sin(x))' = \cos(x)$

Beweis

$$\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) \\
&= \underbrace{\lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0} (\cos(x+t))}_{=\cos(x)} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Wir wissen:
(wenn wir $a = x + h$, $b = x$ setzen)

$$\begin{aligned}\sin(a)-\sin(b)&=\sin\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)-\sin\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\\&=\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)+\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\&\quad-\left(\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)-\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)\\&=2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&=2\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\end{aligned}$$

5. $(\cos(x))'=-\sin(x)$

Beweis

Der Beweis ist analog zum vorherigen Beweis.

6. $(\tan(x))'=\frac{1}{(\cos(x))^2}=1+(\tan(x))^2$

Beweis

$$\begin{aligned}(\tan(x))&=\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\\&\underbrace{=}_{\text{Quotientenregel}}\frac{(\sin(x))'\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(\cos(x))'}{(\cos(x))^2}\\&=\frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}\\&=\frac{1}{(\cos(x))^2}\\&=1+(\tan(x))^2\end{aligned}$$

7. $(\cot(x))'=\frac{-1}{(\sin(x))^2}=-\left(1+(\cot(x))^2\right)$

Beweis

Der Beweis ist analog zum vorherigen Beweis.

8. $(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beweis

Der Arcussinus ist die Umkehrfunktion des Sinus, das heißt: $(y=\arcsin(x))\Leftrightarrow(x=\sin(y))$

$$(\arcsin(x))'=\frac{1}{(\sin(y))'}=\frac{1}{\cos(y)}\underbrace{=}_{\substack{(\sin(y))^2+(\cos(y))^2=1\\(\cos(y))^2=1-(\sin(y))^2}}\pm\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(y))^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Das Vorzeichen entfällt, da $\cos(y) \geqslant 0$
[Grafik]

9. $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beweis

Der Beweis ist analog zum vorherigen Beweis.

10. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Beweis

$y = \arctan(x)$, das heißt: $y = \tan(y)$ (Der Arcustangens ist die Umkehrfunktion des Tangens)

$(\arctan(x))' = \frac{1}{(\tan(y))'} = \frac{1}{1+(\tan(y))^2} = \frac{1}{1+x^2}$

11. $(\operatorname{arccot}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}$

Beweis

Der Beweis ist analog zum vorherigen Beweis.

12. $(\sinh(x))' = \cosh(x)$

Beweis

$(\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

13. $(\cosh(x))' = \sinh(x)$

Beweis

Der Beweis ist analog zum vorherigen Beweis.

14. $(\tanh(x))' = \frac{1}{(\cosh(x))^2}$

$$
\begin{aligned}
(\tanh(x))' &= \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' \\
&= \frac{(\sinh(x))' \cdot \cosh(x) - \sinh(x) \cdot (\cosh(x))'}{(\cosh(x))^2} \\
&= \frac{(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2}{(\cosh(x))^2} \\
&= \frac{1}{(\cosh(x))^2}
\end{aligned}
$$

15. $(\coth(x))' = \frac{-1}{(\sinh(x))^2}$

Beweis

Der Beweis ist analog zum vorherigen Beweis.

Bemerkung: logarithmische Ableitung, nützlicher Trick

Aus der Kettenregel folgt: $\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$.
Eine äquivalente Formulierung ist: $\left(f(x)=e^{g(x)}\right)\Rightarrow\left(f'(x)=g'(x)\cdot e^{g(x)}\right)$

Beispiel

$$\left(x^x\right)'=\left(e^{x\cdot\ln(x)}\right)'=\underbrace{e^{x\cdot\ln(x)}}_{x^x}\cdot\underbrace{\left(x\cdot\ln(x)\right)'}_{\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}}=\left(1+\ln(x)\right)\cdot x^x$$

6.3 Mittelwertsätze

Satz: Satz von Rolle

(von Michael Rolle, 1652..1719)
Gegeben sei eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, wobei

- $f.istStetigIn\left([a,b]\right)$,
- $f.istDifferenzierbarIn\left(]a,b[\right)$.

Dann gilt:
$\left(f(a)=f(b)\right)\Rightarrow\exists\left(x_0\in]a,b[\right):\left(f'(x_0)=0\right)$
[Grafik]

Bemerkung: anschauliche Erklärung

Wir suchen ein $x_0\in]a,b[$, sodass die Tangente an den Graph von f im Punkt $\left(x_0,f(x_0)\right)$ parallel zur x-Achse ist. Das scheint in Maximum- beziehungsweise Minimum-Stellen $x_0\in]a,b[$ zu gelten. Daraus folgt die Beweisidee.

Beweis

1. Fall: $f=const$

$\Rightarrow\forall\left(x_0\in]a,b[\right):\left(f'(x_0)=0\right)$ (In diesem Fall sind wir sehr schnell fertig)

2. Fall

(f sei hier nicht konstant).
$f.istStetigAuf\left([a,b]\right)\Rightarrow$ f nimmt Supremum und Infimum auf $[a,b]$ an.
$\Rightarrow$ Supremum und Infimum können nicht beide gleich $f(a)=f(b)$ sein
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $M:=\sup_{x\in[a,b]}\left(f(x)\right)>f(a)=f(b)$ und $f(x_0)=M$ für ein geeignetes $x_0\in]a,b[$.
Zu zeigen ist nun: $f'(x_0)=0$

$$\left(x<x_0\right)\Rightarrow\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{<0}}\geqslant 0\right)\Rightarrow\lim_{x\to x_0-0}\left(f'\left(x_0\right)\right)\geqslant 0$$

$$\left(x>x_0\right)\Rightarrow\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}\geqslant 0\right)\Rightarrow\lim_{x\to x_0+0}\left(f'\left(x_0\right)\right)\leqslant 0$$

Datum: 26.06.2003

Satz: **Satz von Rolle (Wiederholung)**

$$\forall(a<b):\forall\left(f:[a,b]\to\mathbb{R}\right):$$
$$\left(f.istStetig()\wedge f.istDifferenzierbarAuf(]a,b[)\wedge(f(a)=f(b))\right)$$
$$\Rightarrow\left(\exists\left(x_0\in]a,b[\right):\left(f'(x_0)=0\right)\right)$$

Satz: **1. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung**

Sei eine Funktion f:left[a, b right] toward setR gegeben, welche

- stetig ist
- differenzierbar ist auf $]a,b[$.

Dann gilt: $\exists\left(x_0\in]a,b[\right):\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)\right)$

Beweis

Wir betrachten die Funktion $g(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$.

$\Rightarrow\left(g.istStetigAuf([a,b])\wedge g.istDiffernzierbarIn(]a,b[)\right)$

$\Rightarrow\left(g(a)=f(a)=g(b)\right)$

[Grafik einer Funktion, die im Intervall $[a,b]$ betrachtet wird]

- Anstieg der Sekante (von $(a,f(a))$ nach $(b,f(b))$ ist der Differenzenquotient.
- Anstieg der Tangente ist die Ableitung
- $\Rightarrow$ gleicher Anstieg, also sind Sekante und Tangente parallel.

Aus dem Satz von Rolle folgt:

$\exists\left(x_0\in]a,b[\right):\left(g'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\right)$. Daraus folgt die Behauptung

Bemerkung

Der Mittelwertsatz wird äufig in der Analysis angwendet, zum Beispiel für die Herleitung von Ungleichungen.

Beispiel

Sei $\forall\left(x\in[0,1]\right):\left(f(x)=e^x\right)$.

$\Rightarrow\forall\left(x\in[0,1]\right):\exists\left(x_0\in]0,x[\right):\left(\frac{e^x-1}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(x_0)=e^{x_0}\right)$.

Aus $1=e^0<e^{x_0}<e^x\leqslant e$ folgt: $\forall\left(x\in[0,1]\right):\left(x+1\leqslant e^x\leqslant e\cdot x+1\right)$

Satz: **Folgerung 1**

Sei $f.istStetigAuf([a,b])\wedge f.istDifferenzierbarAuf(]a,b[)\wedge\forall\left(x\in]a,b[\right):\left(f'(x)=0\right)$.

Dann gilt $\forall(x\in[a,b]):(f(x)=f(a)=const)$

Beweis

Sei $x\in]a,b]$ fest gewählt und wenden wir den Mittelwertsatz auf f im Intervall $[a,b]$ an. Dann folgt daraus:

$$\exists(x_0\in]a,x[):\left(0=f'(x_0)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\Bigg|\cdot(x-a)$$

$$\Rightarrow(0=f(x)-f(a))$$

Satz: Folgerung 2: Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen

Sei $f.istStetigAuf([a,b])\wedge f.istDifferenzierbarAuf(]a,b[)$.
Dann gilt:
1. $f.istMonotonWachsendAuf([a,b])\Leftrightarrow\forall(x\in]a,b[):(f'(x)\geqslant 0)$
2. $f.istMonotonFallendAuf([a,b])\Leftrightarrow\forall(x\in]a,b[):(f'(x)\leqslant 0)$

Beweis

Für Aussage 1.

Hinrichtung $\Rightarrow$

Sei $f.istMonotonWachsend()\wedge(a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b)$. $\Rightarrow(f(x)\geqslant f(x_0))$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x-0}\geqslant 0$$ (Zähler $\geqslant 0$, Nenner >0)

$$\Rightarrow\forall(x_0):\left(f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\geqslant 0\right)$$

Daraus folgt die Behauptung.

Rückrichtung $\Leftarrow$

Sei $(\forall(x\in]a,b[):(f'(x)\geqslant 0))\wedge(x_1<x_2)$. Zu zeigen ist $(f(x_2)\geqslant f(x_1))$. Wir wenden den Mittelwertsatz auf f und das Intervall $[x_1,x_2]$ an.

$$\Rightarrow\exists(x_0\in]x_1,x_2[):\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_0)\geqslant 0\right)\Bigg|\cdot(x_2-x-1)$$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$$

Bemerkung

Insbesondere ist $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ (falls keine Division durch 0)

Satz: 2. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Sei $f.istStetigAuf([a,b])\wedge f.istDifferenzierbarAuf(]a,b[)$. Dann
$\exists(x_0\in]a,b[):((f(b)-f(a))\cdot g'(x_0)=(g(b)-g(a))\cdot f'(x_0))$

Beweis

Wir wenden den Satz von Rolle auf die Funktion
$h(x):=(f(b)-f(a))\cdot g(x)-(g(b)-g(a))\cdot f(x)$ an.
$\Rightarrow h.istStetigAuf([a,b])\wedge h.istDifferenzierbarAuf(]a,b[)$
$\Rightarrow h(a)=f(b)\cdot g(a)-g(b)\cdot f(a)=-f(a)\cdot g(b)+g(a)\cdot f(b)=h(b)$
Aus dem Satz von Rolle folgt dann:
$\exists(x_0\in]a,b[):(0=h'(x_0)=(f(b)-f(a))\cdot g'(x_0)-(g(b)-g(a))\cdot f'(x_0))$
Daraus folgt die Behauptung.

6.4 Die l'Hospitalsche Regel

[sieht sehr prüfungsrelevant aus]
(benannt nach Marquis de l'Hospital (1661..1704))

Ziel ist die Herleitung einer Möglichkeit, sogenannte „unbestimmte Audrücke“ der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zu berechnen. Mit den „unbestimmten Ausdrücken“ sind genauer gesagt Grenzwerte der Form $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ mit $\lim_{x\to x_0}(f(x))=\lim_{x\to x_0}(g(x))\in\{0,-\infty,+\infty\}$

Satz

Seien die Funktionen $f:]a,b[\to\mathbb{R}$, $g:]a,b[\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn

1. $\lim_{x\to a+0}(f(x))=\lim_{x\to a+0}(g(x))=0$ <u>oder</u>
2. $\lim_{x\to a+0}(f(x))=\lim_{x\to a+0}(g(x))=\pm\infty$

gilt, so folgt $\lim_{x\to a+0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a+0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, falls der reelle Grenzwert existiert.

Bemerkung

Analoge Assagen gelten für

- linksseitige Grenzwerte,
- zweiseitige Grenzwerte,
- auch für uneigentliche Grenzwerte.

Beweis

(nur für eigentliche Grenzwerte, also die Stelle $a\in\mathbb{R}$ und der Grenzwert $\lim_{x\to a+0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=c\in\mathbb{R}$)

Es gelte $\lim_{x\to a+0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=c\in\mathbb{R}$.

Dann $\forall(\epsilon>0):\exists(\delta>0):\forall(x\in]a,a+\delta[):\left(c-\epsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<c+\epsilon\right)$.

Für beliebige $x,u\in]a,a+\delta[$ existiert nach dem zweiten Mittelwertsatz eine Zwischenstelle x_0 zwischen x und u (also gilt insbesondere: $x_0\in]a,a+\delta[$) mit $\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Daraus folgt $c-\epsilon<\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)}<c+\epsilon$.

Jetzt sei x fest, $u\to a+0$. Wegen $\lim_{u\to a+0}(f(u))=\lim_{u\to a+0}(g(u))=0$ folgt

$\forall(x\in]a,a+\delta[):\left(c-\epsilon\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant c+\epsilon\right)$, das heißt $\exists\left(\lim_{x\to a+0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right)\wedge\left(\lim_{x\to a+0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=c\right)$.

Beispiel

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\underbrace{=}_{\text{l'Hospital}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{1}\right)=\cos(0)=1$$

Beispiel

$$\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{x-\sin(x)}{x^3}}_{\substack{\text{unbestimmter Ausdruck}\\ \text{der Form }\frac{0}{0}}}\right)\underbrace{=}_{\text{l'Hospital}}\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{1-\cos(x)}{3\cdot x^3}}_{\substack{\text{unbestimmter Ausdruck}\\ \text{der Form }\frac{0}{0}}}\right)\underbrace{=}_{\text{l'Hospital}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{6\cdot x}\right)\underbrace{=}_{\text{obiges Beispiel}}\frac{1}{6}$$

Beispiel

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\underbrace{x\cdot\ln(x)}_{\text{Form }0\cdot(-\infty)}\right)=\lim_{x\to x\to 0+0}\left(\underbrace{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}}_{\text{Form }\frac{-\infty}{\infty}}\right)\underbrace{=}_{\text{l'Hospital}}\lim_{x\to 0+0}\left(\underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}_{=-x}\right)=\lim_{x\to 0+0}(x)=0$$

Beispiel

$$\lim_{x\to 0+0}(x^x)=\lim_{x\to 0+0}\left(e^{x\cdot\ln(x)}\right)\underbrace{=}_{\text{Stetigkeit der }e\text{-Funktion}}e^{\lim_{x\to 0+0}(x\cdot\ln(x))}\underbrace{=}_{\text{obiges Beispiel}}e^0=1$$

Bemerkung

Wenn der Grenzwert der Ableitung nicht existiert, dann kann keine Aussage über den ursprünglichen Grenzwert gemacht werden.

Beispiel

$$\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}}_{\text{Form }\frac{0}{0}}\right)=0 \quad\text{wegen}\quad \underbrace{\left|\frac{x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}\right|}_{\underset{x\to 0}{\to}0}=\underbrace{\left|\frac{x}{\sin(x)}\right|}_{\underset{x\to 0}{\to}1}\cdot\underbrace{|x|}_{\underset{x\to 0}{\to}1}\cdot\underbrace{\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}_{\leqslant 1}$$

aber: der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{(\sin(x))'}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos(x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)}\right)$$

existiert nicht.

Exkurs: Bezeichnungen für Ableitungen

- 0. Ableitung: $f=f^{(0)}$
- 1. Ableitung: f'
- 2. Ableitung: f''
- 3. Ableitung: f'''
- 4. Ableitung: $f^{(4)}$
- 5. Ableitung: $f^{(5)}$

6.5 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor

Das Ziel ist die lokale Approximation von Funktionen durch Polynome (das heißt in der Umgebung einer vorgegebenen Stelle).

Definition: Höhere Ableitung

(Dies ist eine rekursive Definition.)
Für eine Funktion $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ und $x_0\in]a,b[$ setzt man

- $f^{(0)}(x_0):=f(x_0)$
- $f^{(n+1)}(x_0):=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{x-x_0}\right)=\left(f^{(n)}\right)'(x_0)$ falls die n-te Ableitung in x_0 differenzierbar ist.

Datum: 01.07.2003

[...25 Minuten zu spät...]
[...]

$$(f\cdot g)^{(n+1)}(x_0)$$
$$=\left((f\cdot g)^{(n)}\right)(x_0)$$
$$=\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n-k)}(x_0)\right)'\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n-k)}(x_0)\right)'$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n+1-k)}(x_0)\right)+\sum_{l=1}^{n-1}(\text{[...abgewischt...]})$$
$$=\text{[...abgewischt...]}$$
$$=\underbrace{f(x_0)\cdot g^{(n+1)}(x_0)}_{\substack{\text{Summand } k=0 \text{ der 1. Summe}\\ 1=\binom{n+1}{0}}}+\sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)}_{\binom{n+1}{k}}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n+1-k)}(x_0)\right)+\underbrace{f^{(n-1)}(x_0)\cdot g(x_0)}_{\substack{\text{letzter Summand der 2. Summe}\\ 1=\binom{n+1}{n+1}}}$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n+1-k)}(x_0)\right)$$

nächstes Ziel: Approximation einer gegebenen Funktion in der Umgebung einer Stelle x_0 durch ein Polynom vom Grad n. Das heißt: Wir suchen ein Polynom $P_n(x)=P_n(x,x_0,f)=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot(x-x_0)^k\right)$ mit der Eigenschaft $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}\right)=0$.

Bemerkung

Wenn ein solches Polynom existiert, dann ist es <u>eindeutig</u> bestimmt.

Beweisidee

Seien P und Q zwei approximierende Polynome, also

- $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(a_n\cdot(x-x_0)^k\right)$
- $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(b_n\cdot(x-x_0)^k\right)$

Zu zeigen ist also $\forall\left(k\in\{0,1,\dots,n\}\right):\left(a_k=b_k\right)$.

Wir betrachten $R(x)=P(x)-Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\left((a_k-b_k)\cdot(x-x_0)^k\right)$.

$$\Rightarrow \frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\underbrace{\frac{f(x)-Q(x)}{(x-x_0)^n}}_{\underset{x\to x_0}{\to}0}-\underbrace{\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n}}_{\underset{x\to x_0}{\to}0}\underset{x\to x_0}{\to}0$$

R ist ein Polynom. Deswegen ist es stetig. Deswegen gilt: $R(x_0)=\lim_{x\to x_0}(R(x))=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}\right)-\lim_{x\to x_0}\left((x-x_0)^n\right)=0=a_0-b_0$

$\Rightarrow (a_0=b_0)$.

Wir betrachten nun (für $x\neq x_0$) $\frac{R(x)}{x-x_0}=(a_1-b_1)+\ldots+(a_n-b_n)\cdot(x-x_0)^{n-1}$. Analog folgt $\forall(x):\left(\sum_{k=1}^{n}\left((a_k-b_k)\cdot(x-x_0)^{k-1}\right)=0\right)$ und damit $x=x_0$ und damit $a_1=b_1$.

Für die restlichen Koeffizienten folgt analog: $a_i=b_i$.

Satz: **Satz von Taylor**

(Brook Taylor (1685..1731))

Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert zu beliebigen $x,x_0\in]a,b[$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}_{=:T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}_{=:R_n(x_0)}$$

$T_n(x)$ heißt „das n-te **Taylor-Polynom** von f an der Stelle x_0 „

$R_n(x)$ heißt „**Restglied**" (Fehler)

Bemerkung

Der Satz besagt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen

- ein approximierendes Polynom von Grad n existiert und
- die Koeffizienten durch $a_k=\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}$ gegeben sind.

Bemerkung

Die Zwischenstelle %xi hängt ab von f,n,x_0,x. Obwohl man also ξ nicht genau kennt, kann man aus der Darstellung des Restgliede Fehlerabschätzungen gewinnen. Wenn zum Beipiel $f^{(n+1)}$ auf $]a,b[$ beschränkt ist, etwa $\forall(x\in]a,b[):\left(\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M\right)$, dann folgt $|f(x)-T_n(x)|\leq\frac{M}{(n+1)!}\cdot\underbrace{|x-x_0|^{n+1}}_{\leq(b-a)^{n+1}}$

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0<x$ (fest). (Für $x_0>x$ geht der Beweis analog.).

Zu zeigen ist: $\exists\left(\xi\in\left]x_0,x\right[\right):\left(f^{(n+1)}(\xi)=\dfrac{f(x)-T_n(x)}{\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}=:\zeta\right)$.

Wir betrachten die Funktion F auf $]a,b[$ (x_0 und x sind fest, t ist die Variable)

$$F(t):=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-t)^k\right)-\frac{\zeta}{(n+1)!}\cdot(x-t)^{n+1}.$$

Aus

- $f.istStetigAuf\left(\left[x_0,x\right]\right)$,
- $f.istDifferenzierbarAuf\left(\left[x_0,x\right]\right)$,
- $F(x r)=0(trivial)$,
- $F(x_0)=0$ (nach Wahl von ζ),
- dem Satz von Rolle

folgt: $\exists\left(\xi\in\left]x_{0,}x\right[\right):\left(F'(\xi)=0\right)$.

Wir berechnen

$$F'(t)=\left(f(x)-\left(f(t)+f'(t)\cdot(x-t)+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n\right)-\frac{\zeta}{(n+1)!}\cdot(x-t)^{n+1}\right)'$$

$$=-f'(t)-\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{k!}\cdot(k-t)^k\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(n)}(t)}{k!}\cdot k\cdot(x-t)^{k-1}\cdot(-1)\right)\right)-\frac{\zeta}{(n+1)!}\cdot(n+1)\cdot(x-t)^n\cdot(-1)$$

$$=-f'(t)-\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{k!}\cdot(k-t)^k\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(n)}(t)}{(k-1)!}\cdot(x-t)^{k-1}\cdot(-1)\right)\right)-\frac{\zeta}{(n+1)!}\cdot(n+1)\cdot(x-t)^n\cdot(-1)$$

$$=-f'(t)-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n+f'(t)+\frac{\zeta}{n!}\cdot(x-t)^n$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n+\frac{\zeta}{n!}\cdot(x-t)^n$$

$$\Rightarrow\left(\left(F'(\xi)=0\right)\Leftrightarrow\left(f^{(n+1)}(\xi)=\zeta\right)\right)$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Lagrangsches Restglied

Das Restglied $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$ heißt **Lagrangsches Restglied**.

Bemerkung: Cauchysches Restglied

Es gibt auch andere Darstellungen des Restglieds, zum Beispiel das **Cauchysche Restglied**:

$$\exists\left(\theta\in\left]0,1\right[\right):\left(R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\cdot(x-x_0)\right)}{n!}\cdot(1-\theta)^{n+1}\cdot(x-x_0)^{n+1}\right)$$

Bemerkung: Taylor-Reihe

Falls für ein beliebiges (aber festes) x in einer Umgebung von x_0 gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(R_n(x)=0\right)$, dann folgt: $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)\right)$ (**Taylor-Reihe**)

Beispiel

Sei $f(x)=e^x$.

$\Rightarrow \left(f^{(k)}(x)=e^x\right)\wedge\left(f^{(k)}(0)=1\right)$ ($x_0=0$)

$$R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\cdot x^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

(ξ liegt zwischen 0 und x)

$$\Rightarrow\left(e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)\right)$$

Datum: 03.07.2003

6.6 Lokale Extrema und Konvexitätsverhalten

Definition: lokales Maximum

Eine Funktion $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0\in]a,b[$ ein **lokales Maximum**, falls eine δ - Umgebung von x_0 existiert mit $\forall(x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[):(f(x_0)\geq f(x))$.

Definition: lokales Minimum

Eine Funktion $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0\in]a,b[$ ein **lokales Minimum**, falls eine δ - Umgebung von x_0 existiert mit $\forall(x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[):(f(x_0)\leq f(x))$.

Bemerkung: Maximum, Minimum, Extramum

Ein **Extremum** ist ein Maximum oder ein Minimum.

Bemerkung: relative Extremum

Ein lokales Extremum ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

Bemerkung: relative Extremum

Ein **relatives Extremum** ist ein lokales Extremum.

Bemerkung: globales Maximum

Die Funktion f hat ein globales Maximum bei x_0, falls
$\forall(x\in Definitionsbereich(f)):(f(x_0)\geq f(x))$.
[Grafik]

Satz: notwendiges Kriterium

$f:]a,b[$ habe ein lokale Extremum an der Stelle $x_0\in]a,b[$. $\exists(f'(x_0))\Rightarrow(f'(x_0)=0)$

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe f bei x_0 ein lokales Maximum.
Es gilt $\forall(x<x_0):\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\right)$ und $\forall(x>x_0):\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0\right)$.

$$\Rightarrow\left(\lim_{x\to x_0-0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\geq 0\right)\wedge\left(\lim_{x\to x_0+0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\leq 0\right)$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=0$$

Bemerkung: nicht hinreichend

Die Bedingung ist nicht hinreichend.

Beispiel

Sei $f(x)=x^3$. Es gilt: $f'(0)=0$, aber f hat kein Extremum bei $x_0=0$.

Satz: hinreichendes Kriterium

Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x_0)=0$ und $\exists(f''(x_0))$. Dann gilt:

- $(f''(x_0)<0)\Rightarrow(f.hastLokalesMaximumBei(x_0))$
- $(f''(x_0)>0)\Rightarrow(f.hastLokalesMinimumBei(x_0))$

Beweis

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c=f''(x_0)>0$. (Für $f''(x_0)<0$ geht der Beweis analog).

Aus der Definition der Ableitung folgt mit $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{r(x)}{x-x_0}\right)=0$:

$$f'(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{=0}+c\cdot(x-x_0)+r(x)=c\cdot(x-x_0)+r(x)$$

$$\Rightarrow \text{ Für } \epsilon:=c \text{ exists } \delta>0 \text{ mit } (0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow\left(\left|\frac{r(x)}{x-x_0}\right|<\epsilon=c\right)$$

$$\Rightarrow(|x-x_0|<\delta)\Rightarrow\left((f'(x)>c\cdot(x-x_0)-c\cdot|x-x_0|)\wedge(f'(x)<c\cdot(x-x_0)+c\cdot|x-x_0|)\right)$$

$$\Rightarrow\left(\forall(x\in]x_0,x_0+\delta[):(f'(x)>0)\right)\wedge\left(\forall(x\in]x_0-\delta,x_0[):(f'(x)<0)\right)$$

$$\Rightarrow f.istStrengMonotonWachsendAuf(]x_0,x_0+\delta])\wedge f.istStrengMonotonFallendAuf([x_0-\delta,x_0[)$$

Somit folgt $(0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow(f(x_0)<f(x))$. Das heißt: f hat ein lokales Minimum bei x_0.

Bemerkung: nicht notwendig

Das Kriterium ist nicht notwendig. Beispielsweise hat $f(x)=x^4$ an der Stelle $x_0=0$ ein lokales Minimum ($f'(0)=0$), aber $f''(0)=0$.
[Grafik]

Definition: konvex

Eine Funktion $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn gilt:
$\forall(x_0<x_1):\forall(\lambda\in]0,1[):\left(f((1-\lambda)\cdot x_0+\delta\cdot x_1)\leqslant(1-\delta)\cdot f(x_0)+\lambda\cdot f(x_1)\right)$
[Grafik]

Definition: konkav

Eine Funktion $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn gilt:
$\forall(x_0<x_1):\forall(\lambda\in]0,1[):\left(f((1-\lambda)\cdot x_0+\delta\cdot x_1)\geqslant(1-\delta)\cdot f(x_0)+\lambda\cdot f(x_1)\right)$
[Grafik]

Satz: Konvexität differenzierbarer Funktionen

Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:
Wenn die Ableitung f' monoton wachsend ist auf $]a,b[$, dann ist f konvex.

Insbesondere gilt, falls f'' auf $]a,b[$ existiert:
$(\forall(x\in]a,b[):(f''(0)>0))\Rightarrow f.istKonvexAuf(]a,b[)$

Satz: **Konkavität differenzierbarer Funktionen**

Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:
Wenn die Ableitung f' monoton fallend ist auf $]a,b[$, dann ist f konkav.
Insbesondere gilt, falls f'' auf $]a,b[$ existiert:
$(\forall(x\in]a,b[):(f''(0)<0))\Rightarrow f.istKonkavAuf(]a,b[)$

Beweis

(für Konvexität. Der Beweis geht analog für Konkavität.)
Sei f' monoton wachsend. Seien $x_0<x_1$ und $\lambda\in]0,1[$ und $x=(1-\lambda)\cdot x_0+\lambda\cdot x_1$.
Zu zeigen ist $(1-\lambda)\cdot f(x)+\lambda\cdot f(x)=(x)\leqslant(1-\lambda)\cdot f(x_0)+\lambda\cdot f(x_1)$. Dies gilt genau dann, wenn $(1-\lambda)\cdot(f(x)-f(x_0))\leqslant\lambda\cdot(f(x_1)-f(x))$.

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi_0=]x_0,x[$, $\xi_1\in]x,x_1[$ mit $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi_0)$ und $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=f'(\xi_1)$

Somit gilt:

$$(1-\lambda)\cdot\underbrace{(f(x)-f(x_0))}_{=(x-x_0)\cdot f'(\xi_0)}=\underbrace{(1-\lambda)\cdot(x-x_0)}_{\lambda\cdot(x_1-x)}\cdot\underbrace{f'(\xi_0)}_{\leqslant f'(\xi_1)}$$

$$=\underbrace{\lambda\cdot(x_1-x)}_{>0}\cdot\underbrace{f'(\xi_0)}_{\leqslant f'(\xi_1)}$$

$$\leqslant\lambda\cdot(x_1-x)\cdot f'(\xi_1)$$

$$=\lambda\cdot(f(x_1)-f(x))$$

Nebenrechnung:
$(1-\lambda)\cdot x+\lambda\cdot x=x=(1-\lambda)\cdot x_0+\lambda\cdot x_1$
$\Rightarrow(1-\lambda)\cdot(x-x_0)=\lambda\cdot(x_1-x)>0$

$\xi_0 < x < \xi_1$

Die 2. Aussage folgt wegen:
$\forall(x \in]a,b[):(f''(x)>0) \Rightarrow (f').istStrengMonotonWachsendAuf(]a,b[)$

Definition: Wendepunkt

Die Funktion $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ hat einen **Wendepunkt** an der Stelle $x_0 \in]a,b[$, fall $\exists(\delta>0)$ mit der Eigenschaft:

- $f.istKonvexAuf([x_0-\delta, x_0]) \wedge f.istKonkavAuf([x_{0,} x_0+\delta])$ oder
- $f.istKonkavAuf([x_0-\delta, x_0]) \wedge f.istKonvexAuf([x_{0,} x_0+\delta])$

Bemerkung

Das heißt, dass in Wendepunkten das Konvexitätsverhalten umschlägt.

Bemerkung

$((x_0).istWendepunktVon(f) \wedge \exists(f''(x_0))) \Rightarrow (f''(x_0)=0)$ (notwendige Bedingung)

Beweis

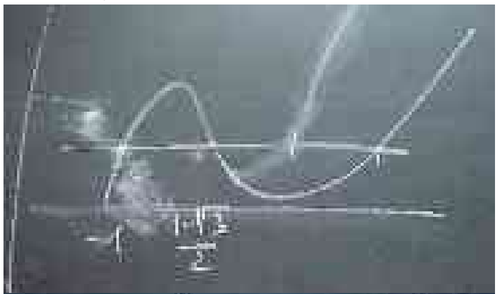
Der Beweis ist klar. Wäre $f''(x_0)>0$, dann wäre f' in einer Umgebung $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ streng monoton wachsend. Dann wäre f konvex. Dann wäre x_0 kein Wendepunkt.

Zusammenfassung: Kurvendiskussion am Beispiel

Sei $f(x)=(1+x)\cdot\sqrt{1-x^2}$.

- Maximaler Definitionbereich:
  $x \in [-1,1]$ (da $\sqrt{1-x^2}$ nur für $1-x^2 \geqslant 0$ definiert ist)
- Berechnung von f':
  $$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+(1+x)\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2\cdot x)=\frac{(1-x^2)-(1+x)\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2\cdot x^2-x}{\sqrt{1-x^2}}$$
  ($x \notin \{-1,1\}$)
- Berechnung von f'':
  $$f''(x)=[\text{...selber nachrechnen...}]=\frac{2\cdot x^3-3\cdot x-1}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}$$
- Nullstellen von f, f', f'' im Intervall $]-1,+1[$
  - $f(-1)=0$, $f(+1)=0$, $f(x)>0$, $x \in]-1,[$
  - $(f'(x)=0) \Leftrightarrow (1-2\cdot x^2-x=0) \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0\right) \Leftrightarrow \left(x_{1|2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}\right)$

- $\forall\left(x\in\left]-1,\frac{1}{2}\right[\right):\left(f'(x)>0\right)\Rightarrow f.istStrengMonotonWachsendAuf\left(\left]-1,\frac{1}{2}\right[\right)$
- $\forall\left(x\in\left]\frac{1}{2},1\right[\right):\left(f'(x)>0\right)\Rightarrow f.istStrengMonotonFallendAuf\left(\left]\frac{1}{2},1\right[\right)$
- $\Rightarrow f.hatLokalesMaximumBei\left(x=\frac{1}{2}\right)$
- $\left(2\cdot x^3-3\cdot x-1\right).hatEineNullstelleBei\left(x=-1\right)$
- Aus der Polynomdivision $\left(2\cdot x^3-3\cdot x-1\right):\left(x+1\right)$ folgt ein Polynom 2. Grades.
  - Dessen Nullstelle ist $x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - Die einzige Nullstelle in $\left]-1,1\right[$ ist $x_w=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$



- Ergebnis
  - f ist monoton wachsend auf $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$
  - f ist monoton fallend auf $\left[\frac{1}{2},1\right]$
  - f ist konvex auf $\left[-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]$
  - f ist konkav auf dem Rest
  - lokales Maximum bei $x=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ldots$

Datum: 08.07.2003

7. Das unbestimmte Integral

7.1 Stammfunktion und Grundintegrale

Definition: Stammfunktion

Sei I ein beliebiges Intervall (offen, halboffen, abgeschlossen, endlich oder unendlich). Eine Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu $f: I \to \mathbb{R}$, falls $\forall (x \in I) : (F'(x) = f(x))$.

Bemerkung

In gewissem Sinne ist die Konstruktion einer Stammfunktion die inverse Operatio zur Differentiation.

Satz

Sei F_1 eine Stammfunktion zu f. Dann gilt:
$(F_2).istStammfunktionZu(f) \Leftrightarrow \exists (c \in \mathbb{R}) : (F_2 = F_1 + c)$

Beweis

- Hinrichtung $\Rightarrow$:
  F_1 und F_2 sind Stammfunktionen zu f. Das heißt: $F_1' = F_2' = f$.
  $\Rightarrow (F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = 0$
  $\Rightarrow \exists (c \in \mathbb{R}) : (F_2 - F_1 = c)$
- Rückrichtung $\Leftarrow$:
  Sei $F_2 = F_1 + c$. Sei F_1 Stammfunktion zu f. Dann gilt:
  $F_2' = (F_1 + c)' = F_1' = f$
  Das heißt: F_2 ist Stammfunktion zu f.

Bezeichnung: Stammfunktion, unbestimmtes Integral

Die Stammfunktion ist das unbestimmte Integral. Das unbestimmte Integral ist die Menge aller Stammfunktion. [Ist damit die Stammfunktion eine Menge?]
$F(x) = \int (f(x) dx)$

Satz: Grundintegrale

1. $\forall (\alpha \neq -1) : \left(\int (x^\alpha dx) = \frac{x \alpha + 1}{\alpha + 1} + c \right)$
2. $\int \left(\frac{1}{x} dx \right) = \ln(|x|) + c$
3. $\int (\sin(x) dx) = -\cos(x) + c$
4. $\int (\cos(x) dx) = \sin(x) + c$

5. $\int\left(\frac{1}{(\cos(x))^2}dx\right)=\tan(x)+c$
6. $\int\left(\frac{1}{(\sin(x))^2}dx\right)=-\cot(x)+c$
7. $\int\left(e^x dx\right)=e^x+c$
8. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)=\arcsin(x)+c$
9. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right)=\arctan(x)+c$
10. $\int\left(\sinh(x)dx\right)=\cosh(x)+c$
11. $\int\left(\cosh(x)dx\right)=\sinh(x)+c$

Beweis

Die Grundintegrale folgen direkt aus den Differentiationsregeln.

Bemerkung

zu 2.: $\int\left(\frac{1}{x}dx\right)=\ln(|x|)+c$

Für $x<0$ gilt: $(\ln(|x|)+c)'=\ln(-x)'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$

7.2 Integrationsmethoden

Satz: Linearität der Stammfunktion

Sei:
- $(F_1).istStammfunktionZu(f_1)$
- $(F_2).istStammfunktionZu(f_2)$
- $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

Dann gilt:
- $(\lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2).istStammfunktionZu(\lambda_1\cdot f_1+\lambda_2\cdot f_2)$

Beweis

$$(\lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2)' \underbrace{=}_{\text{Linearität der Ableitung}} =\lambda_1\cdot F_1'+\lambda_2\cdot F_2' \underbrace{=}_{\text{Voraussetzung}} \lambda_1\cdot f_1+\lambda_2\cdot f_2$$

Daraus folgt die Behauptun

Satz: partielle Integration

Sei:
- $f.istDifferenzierbar()$
- $g.istDifferenzierbar()$
- $\exists(F_1):((F_1).istStammfunktionZu(f\cdot g'))$

Dann gilt:
- $\exists(F_2):\left(\left(F_2\right).istStammfunktionZu\left(f'\cdot g\right)\right)$
- $\int\left(f'(x)\cdot g(x)dx\right)=f(x)\cdot g(x)-\int\left(f(x)\cdot g'(x)dx\right)$

Beweis

Aus der Produktregel der Differentiation folgt:
$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$. Das heißt: $f\cdot g$ ist Stammfunktion zu $f'\cdot g+f\cdot g'$. (Also $f\cdot g=\int\left((f'\cdot g+f\cdot g')dx\right)$)
$\Rightarrow\int\left(f'\cdot g\,dx\right)=f\cdot g-\underbrace{\int\left(f\cdot g'\,dx\right)}_{\text{existiert nach Voraussetzung}}$

Satz: **Substitutionsregel**

Sei:
- I ein Intervall
- J ein Intervall
- $g:I\to J$
- $g.istDifferenzierbarAuf(I)$
- $\forall(x\in I):\left(g'(x)\neq 0\right)$
- $F.istStammfunktionZu\left(f:J\to\mathbb{R}\right)$

Dann:
- $(F\circ g):I\to\mathbb{R}$ ist Stammfunktion zu $\left((f\circ g)\cdot g'\right):I\to\mathbb{R}$. Das heißt:
- $\int\left(f(g(t))\cdot g'(t)dt\right)=F(g(t))\underbrace{=}_{x=g(t)}\int\left(f(x)dx\right)$

Beweis

Aus der Kettenregel der Differentiation folgt:
$\left(F(g(t))\right)'=F'(g(t))\cdot g'(t)=f(g(t))\cdot g'(t)$

Bemerkung

Es gibt Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen.

Beispiel: **Dirichlet-Funktion**

Sei $f(x)=\begin{cases}1 & \text{wenn } x\in\mathbb{C}\\ 0 & \text{wenn } x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{C})\end{cases}$. ($x\in[0,1]$)

Nach dem Zwischenwertsatz für differnzierbare Funktionen (den wir nicht bewiesen haben) würde für eine Stammfunktion F von f gelten: $F'=f$ nimmt alle Werte zwischen 0 und 1 an. Dies ist ein Widerspruch.

Exkurs: **Zwischenwertsatz für differenzierbare Funktionen**

Sei:
- $F:[a,b]\to\mathbb{R}$
- $F.istDifferenzierbar()$

Dann:

- $f := F'$ nimmt auf $[a, b]$ alle Werte zwischen $F'(a)$ und $F'(b)$ an.

Beispiel: **partielle Integration**

$$\int (\ln(x) dx) = \int \left(\underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} dx \right) = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} - \int \left(\underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} dx \right) = x \cdot \ln(x) - x + c$$

Beispiel: **partielle Integration**

$$\int \left((\cos(x))^2 dx \right) = \int \left(\underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} dx \right)$$

$$= \sin(x) \cdot \cos(x) - \int \left(\left(-(\sin(x))^2 \right) dx \right)$$

$$= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int \left(\left(1 - (\cos(x))^2 \right) dx \right)$$

$$= \sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \left((\cos(x))^2 dx \right)$$

$f(x) = \sin(x)$
$g'(x) = -\sin(x)$

Falls $(\cos(x))^2$ eine Stammfunktion besitzt, dann folgt:

$$\int \left((\cos(x))^2 dx \right) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x) + x}{2} + c = \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot x) + \frac{x}{2} + c$$

(Es gilt:

- $\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\cos(2 \cdot x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = 2 \cdot (\cos(x))^2 - 1$

)

Probe

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot x) + \frac{x}{2} + c \right)' = \frac{1}{4} \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(\cos(2 \cdot x) + 1)}_{2 \cdot (\cos(x))^2} = (\cos(x))^2$$

Beispiel: **Substitution**

$$\int \left((\cos(x))^2 dx \right) \underbrace{=}_{\text{Gleiche Nebenrechnung wie im obigen Beispiel}} \int \left(\frac{\cos(2\cdot x)+1}{2} \cdot dx \right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{Linearität}} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int (\cos(2\cdot x) dx)}_{\substack{\text{Wir subtituieren: } y=2\cdot x \\ \frac{dy}{dx}=y'=2 \\ \text{formal: } dx=\frac{1}{2}\cdot dy}} + \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\int (dx)}_{=\frac{x}{2}+c}$$

$$\underbrace{=}_{\text{Substitutionsregel}} \frac{1}{2} \cdot \int \left(\cos(y) \cdot \frac{dy}{z} \right) + \frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sin(y) + \frac{x}{2} + c$$

$$\underbrace{=}_{\text{Rücksubstitution}} \frac{1}{4} \cdot \sin(2\cdot x) + \frac{x}{2} + c$$

Beispiel: **Substitution**

$$\int (\tan(x) dx) = \int \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \right) = -\int \left(\frac{1}{y} \cdot dy \right) = -\ln(|x|) + c = -\ln(|\cos(x)|) + c$$

Die verwendete Substitution ist:

- $(y=\cos(x))$
- $\Rightarrow (dy=-\sin(x) dx)$
- das heißt: $y' = \frac{dy}{dx} = -\sin(x)$

Beispiel: **Substitution**

$$\int \left(\frac{1}{x\cdot \ln(x)} dx \right) = \int \left(\frac{1}{\ln(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{=dy} \right) \underbrace{=}_{(y=\ln(x)) \wedge \left(dy=\frac{dx}{x}\right)} = \int \left(\frac{dy}{y} \right) = \ln(|y|) + c = \ln(|\ln(x)|) + c$$

Bemerkung

Es gibt einige Faustregel, bei welcher Form des Integranden spezielle S ubstitution beziehungsweise partielle Integration zum Ziel führen.

Beispiel

Für Funktionen der Form $p(x) \cdot \left\{ \begin{matrix} \sin(x) \\ \cos(x) \\ e^x \\ \sinh(x) \\ \cosh(x) \end{matrix} \right\}$, wobei $p(x)$ ein Polynom ist, benutzt man partielle Integration derart, dass der Grad des Polynom verringert wird.

Beispiel

$$\int\left(\underbrace{p(x)}_{f}\cdot\underbrace{e^x}_{g'=g}\,dx\right)=p(x)\cdot e^x-\int\left(p'(x)\cdot e^x\,dx\right)$$

Diese Vorgehensweise wird so lange wiederholt, bis die Ableitung von p $=const$.

Beispiel

Integrale der Form $\int\left(\frac{p(\sin(x),\cos(x))}{q(\sin(x),\cos(x))}dx\right)$ mit Polynomen p , q in 2 Variablen lassen sich

- durch die Substitution $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (beziehungsweise $x=2\cdot\arctan(t)$) $dx=2\cdot\frac{dt}{1+t^2}$

  beziehungsweise
- manchmal durch $t=\tan(x)$ (beziehungsweise $x=\arctan(x)$)

auf das Integral einer rationalen Funktion $\int\left(\frac{P(t)}{Q(t)}dt\right)$ zurückführen. (P , Q sind Polynome in einer Variablen). Hierfür existiert ein Algorithmus.

Beispiel: **Substitution**

$$\int\left(\underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx\right)=x\cdot e^x-\int\left(e^x\,dx\right)=x\cdot e^x-e^x+c=(x-1)\cdot e^x+c$$ ($f'(x)=1$, $g(x)=e^x$)

Beispiel: **Substitution**

$$\int\left(\frac{1}{(\sin(x))^2\cdot(\cos(x))^4}dx\right)=\int\left(\frac{1+t^2}{t^2}\cdot(1+t^2)^2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt\right)$$
$$=\int\left(\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)dt\right)$$
$$=\frac{t^3}{3}+2\cdot t-\frac{1}{t}+c$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(\tan(x))^2+2\cdot\tan(x)-\frac{1}{\tan(x)}+c$$

Angewandte Substituion:

-
  - $(t=\tan(x))\Leftrightarrow(x=\arctan(t))$
  - $\Rightarrow\left(dx=\frac{dt}{1+t^2}\right)$
-
  - $(\sin(x))^2=(\tan(x))^2\cdot(\cos(x))^2=(\tan(x))^2\cdot\left(1+(\sin(x))^2\right)$
  - $\Rightarrow(\sin(x))^2\cdot\left(1+(\tan(x))^2\right)=(\tan(x))^2$
  - $\Rightarrow(\sin(x))^2=\frac{t^2}{1+t^2}$

- $(\cos(x))^2 = \frac{1}{1+t^2}$ (analog)

Datum: 15.07.2003

Wiederholung

- Ziel ist, $\int \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx \right)$ zu berechnen, wobei P und Q Polynome sind.
- Die Vorgehensweise ist: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von Partialbrüchen darzustellen.
- Diese Partialbrüche sind der Form
  - $\frac{A}{(x-a)^k}$ oder
  - $\frac{M \cdot x + N}{(r(x))^k}$ mit $r(x) = x^2 + p \cdot x + q$ wobei $r(x)$ ohne reelle Nullstelle ist.

Satz

Jedes komplexe Polynom Q mit $grad(Q) \geqslant 1$ lässt sich darstellen als Produkt von Linerfaktoren: $Q(z) = (z-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z-a_m)^{n_m} \cdot c$. ($a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ sind die Nullstellen von Q mit der jeweiligen Vielfachheit $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Für die Vielfachheiten gelten: $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = grad(Q)$.)

Folgerung

Ist Q ein reelles Polynom und $grad(Q) \geqslant 1$, dann lässt sich Q wie folgt darstellen:

$$Q(x) = \underbrace{(x-a_1)^{h_1} \cdot (x-a_2)^{h_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_s)^{h_s}}_{\text{reelle Nullstellen von } Q} \cdot \underbrace{\underbrace{(x^2 + p_1 \cdot x + q_1)}_{=r_1(x)}{}^{m_1} \cdot \underbrace{(x^2 + p_2 \cdot x + q_2)}_{=r_2(x)}{}^{m_2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x^2 + p_t \cdot x + q_t)}_{=r_t(x)}{}^{m_t}}_{\text{erzeugt von den Paaren konjugiert komplexer Nullstellen (haben keine reellen Nullstellen)}}$$

Satz: Partialbruchzerlegung

Seien P, Q reelle Polynome, $grad(Q) \geqslant I$, $grad(P) < grad(Q)$. Dann gilt:
Sei $a \in \mathbb{R}$ Nullstelle von Q der Vielfachheit k, das heißt: $Q(x) = (x-a)^k \cdot Q_1(x)$, wobei $Q_1(a) \neq 0$. Dann existiert $A \in \mathbb{R}$ und ein Polynom $P_1(x)$ mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot Q_1(x)}.$$

Beweis

Wir setzen $A := \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Daraus folgt, dass a eine Nullstelle des Polynoms $P(x) - A \cdot Q_1(x)$ ist.

Daraus folgt, dass $\frac{P(x) - A \cdot Q_1(x)}{x-q} =: P_1(x)$ (Polynom) [?].

$$\Rightarrow \left(P(x) = (x-a) \cdot P_1(x) + A \cdot Q_1(x) \right) \Big| : Q(x) = Q_1(x) \cdot (x-a)^k$$

$$\Rightarrow \left(\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot Q_1(x)} \right)$$

Satz: Partialbruchzerlegung

Seien P, Q reelle Polynome, $grad(Q) \geq I$, $grad(P) < grad(Q)$. Dann gilt:
Seien $b, \overline{b} \in \mathbb{C}$ komplexe Nullstellen von Q der Vielfachheit k,
$r(x) = (x-b)\cdot(x-\overline{b}) = x^2 - 2\cdot\Re(b)\cdot x + |b|^2 = x^2 + \underbrace{p}_{\in\mathbb{R}}\cdot x + \underbrace{q}_{\in\mathbb{R}}$, das heißt: $Q(x) = (r(x))^k \cdot Q_1(x)$, wobei Q_1 nicht durch r teilbar ist. Dann existiert $M, N \in \mathbb{R}$ und ein Polynom P_1 mit
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M\cdot x + N}{(r(x))^k} + \frac{P_1(x)}{(r(x))^{k-1}\cdot Q_1(x)}$$

Beweis

Der Beweis geht ähnlich wie oben.

Bemerkung

Wichtig ist, dass im Rest $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot Q_1(x)}$ der Grad des Nenners kleiner wird.

Bemerkung

Durch Iteration erhält man für eine k-fache Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ von Q:
$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, wobei $Q_1(a) \neq 0$.
Das macht man für alle reellen Nullstellen von Q.
Analog erhält man für Paare konjugiert-komplexer Nullstellen der Vielfachheit k:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_k\cdot x + N_k}{(r(x))^2} \ldots + \frac{M_1\cdot x + N_1}{r(x)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Bemerkung

Aus dem Beweis ist ersichtlich, dass alle Koeffizienten eindeutig bestimmt sind. Daraus lässt sich folgender Algorithmus ableiten (erläutert an einem Beispiel): (Die Einzelheiten der Rechnung soll man selbst mit Stift und Papier nachvollziehen.)

Beispiel

Gegeben sei $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2\cdot x^5 - x^4 + 8\cdot x^3}{x^6 - 2\cdot x^5 - 5\cdot x^4 - 8\cdot x^3 + 8\cdot x^2 - 8\cdot x + 4}$.

1. Zerlergung von Q in Linearfaktoren und quadratische Polynome:
   Nullstellen von Q: durch Probieren: $x=1$ ist Nullstelle: $Q(1)=0$
   $Q_1'(1)=0$, $Q_1''(1)\neq 0$
   $\Rightarrow$ 1 ist doppelte Nullstelle
   Polynomdivision: $\frac{Q(x)}{(x-1)^2} = \ldots = x^4 + 4\cdot x^2 + 4 = (x^2+2)^2$, $r(x) = x^2+2$ hat keine rellen Nullstellen.
   $Q(x) = (x-1)^2\cdot(x^2+2)^2$
2. Ansatz für Partialbruchzerlegung aufstellen

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C\cdot x+D}{(x^2+2)^2}+\frac{E\cdot x+F}{x^2+2}$$

3. Berechnung der Koeffizienten $(A, B, \ldots, F)$
   $\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{1}{(x-1)^2}$ berechnen.
   $=\frac{P(x)-(x^2+2)^2}{Q(x)}$ (Zähler muss durch $(x-1)$ teilbar sein.)
   $$=\ldots=\frac{2\cdot x^4+8\cdot x^2+4\cdot x+4}{(x-1)\cdot(x^2+2)^2}=\frac{4\cdot(x-1)+2\cdot(x^2+2)^2}{}=\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x^2+2)^2}$$
   $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x^2+2)^2}$$
   1. Substitution $x^2=2\cdot y^2$, $x=\sqrt{2}\cdot y$
   2. Iterationsf. [?] $\frac{4}{(x^2+2)^2}=\frac{1}{(y^2+1)^2}$
4. Integration der einzelnen Partialbrüche
   Die Partialbrüche sind elementar integrierbar.

$$\Rightarrow\int\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot dx\right)=-\frac{1}{x-1}+2\cdot\ln(|x-1|)+\frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{x}{\sqrt{2}\cdot(x^2+2)}+C$$

- Wir wissen:
  - $I_m:=\int\left(\frac{1}{(x^2+1)^m}\cdot dx\right)$
  - $I_{m+1}:=-\frac{2\cdot m-1}{2\cdot m}\cdot I_m+\frac{x}{2\cdot m(x^2+1)^m}$
- $m=1$:
  $$I_1=\int\left(\frac{1}{(y^2+1)^2}\cdot dy\right)=\frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{1}{y^2+1}\cdot dy\right)+\frac{y}{2\cdot(y^2+1)}=\frac{1}{2}\cdot\arctan(y)$$

8. Das bestimmte Integral (Riemann-Integral)

(Bernhard Riemann (1826..1866))

8.1 Definition

Das behandelte Problem ist:

- Gegeben ist eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, etwa $f(x)\geqslant 0$.
- Gesucht ist: Flächeninhalt der Fläche $\{(x,y)|(a\leqslant x\leqslant b)\wedge(0\leqslant y\leqslant f(x))\}$

Definition: Zerlegung, Feinheit

$Z=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ heißt **Zerlegung** des Intervalls $[a,b]$, die **Feinheit** der Zerlegung Z ist definiert als $\delta=\delta(Z):=\max(\{x_{i+1}-x_i|i\})$.

Definition: feiner

Die Zerlegung Z_1 heißt **feiner** als die Zerlegung Z_2, falls $Z_1 \supseteq Z_2$.

Definition: Überlagerung

$Z_1 \cup Z_2$ heißt **Überlagerung** der Zerlegungen Z_1 und Z_2

Bezeichnung

Jeder Zerlegung Z ordnen wir die Intervalle $\forall (j \in \{1,\ldots,n\}) : (I_j := [x_{j_1}, x_j])$ zu. Es gilt damit für die Länge der Intervalle: $\forall (j \in \{1,\ldots,n\}) : (|I_j| := x_j - x_{j-1})$.
Sei

- $m_j := \inf(\{f(x) | x \in I_j\})$
- $M_j := \sup(\{f(x) | x \in I_j\})$

Definition: Riemannsche Untersumme

$S_*(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (m_j \cdot |I_j|)$ heißt **Riemannsche Untersumme**.

Definition: Riemannsche Obersumme

$S^*(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (M_j \cdot |I_j|)$ heißt **Riemannsche Obersumme**.

Lemma: Eigenschaften von Ober- und Untersummen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

1. $S^*(f, Z) \geqslant S_*(f, Z)$
2. Ist Z_1 feiner als Z_2, dann gilt:
   1. $S_*(f, Z_1) \geqslant S_*(f, Z_2)$
   2. $S^*(f, Z) \leqslant S^*(f, Z_2)$
3. Jede Untersumme $S_*(f, Z_1)$ ist kleiner als jede Obersumme $S*(f, Z_2)$.

Beweis

Seien Z_1, Z_2 beliebige Zerlegungen.
$\Rightarrow$ $Z := Z_1 \cup Z_2$ ist feiner als Z_1 und Z_2.
$$\Rightarrow S_*(f, Z_1) \underbrace{\leqslant}_{Z_1 \text{ ist feiner als } Z_2 \text{(wegen 2.)}} S_*(f, Z) \underbrace{\leqslant}_{\text{(wegen 1.)}} S^*(f, Z) \underbrace{\leqslant}_{\text{(wegen 2.)}} S^*(f, Z_2)$$

Datum: 17.07.2003

Wiederholung

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Wir definieren eine Zerlegung Z des Definitionsbereiches mit Hilfe von $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$:

- $\forall(j\in\{1,2,\ldots,n\}):\left((I_j:=[x_{j-1},x_j])\wedge(|I_j|=x_j-x_{j-1})\right)$
- $\forall(j\in\{1,2,\ldots,n\}):\left(m_j:=\inf(\{f(x)|x\in I_j\})\right)$
- $\forall(j\in\{1,2,\ldots,n\}):\left(M_j:=\sup(\{f(x)|x\in I_j\})\right)$
- Die Obersumme ist $S^*(f,Z):\sum_{j=1}^{n}(M_j\cdot|I_j|)$
- Die Untersumme ist $S_*(f,Z):\sum_{j=1}^{n}(m_j\cdot|I_j|)$

Eigenschaften

- Bei Verfeinerung der Zerlegung werden
  - die Obersummen kleiner und
  - die Untersummen größer.
- Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.
- Daraus folgt:
  - Die Menge aller Untersummen ist nach oben beschränkt (durch eine beliebige Obersumme)
  - Die Menge aller Obersummen ist nach unten beschränkt (durch eine beliebige Untersumme)

Definition: Riemann-integrabel

Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrabel**, falls $\inf(\{S^*(f,Z)|\forall(Z)\})=\sup(\{S_*(f,Z)|\forall(Z)\})$. Der gemeinsame Wert wird dann als $\int_a^b(f(x)\cdot dx)$ bezeichnet.

Bemerkung

Es gibt beschränkte Funktionen, die nicht integrabel sind, zum Beispiel die Dirichlet-Funktion

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{wenn } x\in\mathbb{C}\\ 1 & \text{wenn } x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{C})\end{cases} \text{ auf } [0,1].$$

Für sie gilt:

- $\forall(Z):\forall(j\in\{1,2,\ldots,n\}):\left(m_j=\inf(\{f(x)|x\in I_j\})=0\right)$
- $\forall(Z):\forall(j\in\{1,2,\ldots,n\}):\left(M_j=\sup(\{f(x)|x\in I_j\})=1\right)$
- Das heißt:
  - Jede Untersumme ist 0.
  - Jede Obersumme ist 1.

8.2 Riemannsches Integrabilitätskriterium

Satz

Eine Beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist Riemann-integrabel genau dann, wenn $\forall(\epsilon>0):\exists(\text{Zerlegung } Z):(S^*(f,Z)-S_*(f,Z)<\epsilon)$.

Beweis

- Hinrichtung $\Rightarrow$:
  Sei f integrabel, $\epsilon>0$.
  Dann folgt aus der Definition des Supremums und des Infimums, dass Zerlegungen Z_1 und Z_2 existieren mit:
  - Sei $Z:=Z_1\cup Z_2$ die Überlagerung der beiden Zerlegungen, also Z ist feiner als Z_1 und Z_2. Dann gilt:
  - $S_*(f,Z)\geqslant S_*(f,Z_1)\geqslant\int_a^b(f(x)dx)-\frac{\epsilon}{2}$
  - $S_*(f,Z)\leqslant S_*(f,Z_2)\leqslant\int_a^b(f(x)dx)+\frac{\epsilon}{2}$

  Damit ist $S^*(f,Z)-S_*(f,Z)<\epsilon$.
- Rückrichtung $\Leftarrow$:
  Sei $\epsilon>0$ beliebig, Z wie in der Bedingung.
  Dann folgt daraus:
  - $S^*(f,Z)<S_*(f,Z)+\epsilon$
  - $S_*(f,Z)<S^*(f,Z)$

  Daraus folgt: $\sup(\{S_*(f,Z)|\forall(Z)\})=\inf(\{S^*(f,Z)|\forall(Z)\})$.
  Also ist f integrabel.

8.3 Klassen integrierbarer Funktionen

Satz

Monotone Funktionen sind integrabel.

Beweis

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit f monoton wachsend und $f(a)<f(b)$. Sei Z eine beliebige Zerlegung. Dann gilt:

- $\forall(j).(m_j=f(x_{j-1}))$
- $\forall(j).(M_j=f(x_j))$

Also ist:

$$\begin{aligned} S^*(f,Z)-S_*(f,Z) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\underbrace{\underbrace{(M_j-m_j)}_{=f(x_j)-f(x_j-1)}}_{\geqslant 0}\cdot\underbrace{|I_j|}_{\leqslant\delta=\text{Feinheit von } Z}\right)\\ &\leqslant \delta\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(f(x_j)-f(x_{j-1})\right)\\ &= \delta\cdot(f(b)-f(a))\\ &< \epsilon \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\left(\delta<\frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}\right)$$

Satz

Stetige Funktionen sind integrabel.

Satz

Treppenfunktionen sind integrabel.

Bemerkung: Treppenpunkt

f heißt Treppenpunkt, falls eine Zerlegung Z ex istiert, sodass f auf jedem Teilintervall $]x_{j-1},x_j[$ konstant ist (also $\exists(c):\forall\left(x\in]x_{j-1},x_j[\right):(f(x)=c)$).

8.4 Eigenschaften des bestimmten Integrals

Satz: Linearität des unbestimmten Integrals

Seien $f_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und integrabel. Dann gilt:

- $\forall(\lambda_1\in\mathbb{R}):\forall(\lambda_2\in\mathbb{R}):\left((f:=\lambda_1\cdot f_2+\lambda_2\cdot f_2).istIntegrierbar()\right)$
- $\forall(\lambda_1\in\mathbb{R}):\forall(\lambda_2\in\mathbb{R}):\left(\int_a^b(f(x)\cdot dx)=\lambda_1\cdot\int_a^b(f_1(x)\cdot dx)+\lambda_2\cdot\int_a^b(f_2(x)\cdot dx)\right)$

„Damit ist die Menge der beschränkten Riemann-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum (auf den reellen Zahlen)."

Beweisidee

Der Satz folgt aus Betrachtungen von Untersummen beziehungsweise Obersummen und dem Übergang zu Supremum der Untersummen und Infimum der Obersummen.

Satz: Monotonie des unbestimmten Integrals

Seien $f_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und integrabel. Dann gilt:

- $(f_1\leqslant f_2)\Rightarrow\left(\int_a^b(f(x)\cdot dx)\leqslant\int_a^b(f_2(x)\cdot dx)\right)$

Beweisidee

Der Satz folgt aus Betrachtungen von Untersummen beziehungsweise Obersummen und dem Übergang zu Supremum der Untersummen und Infimum der Obersummen.

Satz

Seien $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f_2 : [b,c] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrabel. Dann gilt:

- $f.istIntegrabelAuf([a,c])$
- $\int_a^c (f(x) \cdot dx) = \int_a^b (f(x) \cdot dx) + \int_b^c (f(x) \cdot dx)$

Beweisidee

Man wähle Zerlegungen Z_1 von $[a,b]$ und Z_2 von $[b,c]$, sodass das Riemannkriterium für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ erfüllt ist. Wir betrachten dann die Zerlegung $Z := Z_1 \cup Z_2$ von $[a,c]$

Satz

Sei:

- $I = [c,d]$
- $f : [a,b] \to [c,d]$, $f.istIntegrabel()$
- $\varphi [c,d] \to \mathbb{R}$, $\varphi.istStetig()$.

Dann ist $\varphi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabel.

Beweis

Der Beweis ist technisch aufwändig und wird deswegen weggelassen.

Folgerung

Ist f integrabel, dann ist $|f|$ ebenfalls integrabel.

Beweis

Sei f integrierbar und $\varphi(t) = |t|$ stetig. Dann ist $(\varphi \circ f)(x) = |f(x)|$ integrabel.

Folgerung:

Sind f und g integrabel, dann ist $f \cdot g$ integrabel.

Beweis

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

Wir wissen:

- $f+g$ ist integrabel.
- $f-g$ ist integrabel.
- $\varphi(t) = t^2$ ist stetig.

Also sind $(f+g)^2$ und $(f-g)^2$ integrabel.

Folgerung: Dreiecksungleichung für Integrale

Ist f integrabel, dann gilt: $\left|\int_a^b \left(f(x)\cdot dx\right)\right| \leqslant \int_a^b \left(|f(x)|\cdot dx\right)$.

8.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ziel ist, den Zusammenhang zwischen unbestimmten und bestimmten Integral herzustellen, also die Präzisierung der Aussage „Differentiation ist die Umkehroperation zur Integration".

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei:

- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integierbar und
- $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ Stammfunktion zu f.

Dann gilt: $\underbrace{\int_a^b \left(f(x)\cdot dx\right)}_{\text{bestimmtes Integral}} = \underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{unbestimmtes Integral}}$.

Beweis

Sei Z eine beliebige Zerlegung. Wir betrachten F auf jedem Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ und wenden dort den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.

$$\Rightarrow \exists\left(t_j \in]x_{j-1}, x_j[\right): \left(\left(\frac{F(x_j)-F(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}} = F'(t_j) \underbrace{=}_{F'=f} f(t_j)\right) \wedge \left(f(t_j) \leqslant M_j\right) \wedge \left(f(t_j) \geqslant m_j\right)\right)$$

$$\Rightarrow F(x_j)-F(x_{j-1}) \leqslant M_j\cdot(x_j-x_{j-1})$$

$$\Rightarrow F(x_j)-F(x_{j-1}) \geqslant m_j\cdot(x_j-x_{j-1})$$

Aus der Summe über alle Teilschritte j folgt: $S_*(f,Z) \leqslant \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(F(x_j)-F(x_{j-1})\right)}_{F(b)-F(a)} \leqslant S^*(f,Z)$.

$S_*(f,Z) \leqslant F(b)-F(a) \leqslant S^*(f,Z)$ gilt für beliebige Zerlegungen.

$S_*(f,Z) \leqslant F(b)-F(a)$ folgt aus dem Supremum über alle Zerlegungen.

$F(b)-F(a) \leqslant S^*(f,Z)$ folgt aus dem Infimum über alle Zerlegungen.

$$\Rightarrow \left(\int_a^b \left(f(x)\cdot dx\right) \leqslant F(b)-F(a) \leqslant \int_a^b \left(f(x)\cdot dx\right)\right)$$

Bemerkung

Als Folgerung ergeben sich

- die Substitutionsregel und
- die Formel der partiellen Integration

für bestimmte Integrale analog zu den unbestimmten Integralen.

Beispiel: partielle Integration

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ (Produktregel der Differentiation)

Das heißt $F = f\cdot g$ ist die Stammfunktion von $f'\cdot g + f\cdot g'$.

- $\int (f'(x)\cdot g(x)\cdot dx)+\int (f(x)\cdot g(x)\cdot dx)=\int ((f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x))\cdot dx)=f(x)\cdot g(x)$
- $\Rightarrow \int (f'(x)\cdot g(x)\cdot dx)=f(x)\cdot g(x)-\int (f(x)\cdot g'(x)\cdot dx)$.

Aus dem Hauptsatz folgt:

$$\int_a^b ((f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x))dx)=F(b)-F(b)=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f'(x)\cdot g(x)\cdot dx)=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b-\int_a^b (f(x)\cdot g'(x)\cdot dx)$$ (partielle Integration)

Beispiel: Substitutionsregel

Analog folgt:

$$\int_a^b (f(g(z))\cdot g'(t)\cdot dt) \underbrace{=}_{\substack{\text{Substitution: } x=g(t)\\ dx=g(t)\cdot dt}} \int_{g(a)}^{g(b)} (f(x)\cdot dx)$$

Satz

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und stetig in einem Punkt $x_0\in]a,b[$. Dann ist die Funktion $F(x):=\int_a^x (f(t)\cdot d)$ in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0)=f(x_0)$.

Bemerkung

Wenn f stetig auf left[a, b right]ist, dann ist F die Stammfunktion zu f.

Beweis

Sei zunächst $x>x_0$. Zu zeigen ist: $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right)=0$.

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{\int_a^x ()-\int_a^{x_0} ()}{x-x_0}-f(x_0)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{x-x_0}\cdot\int_{x_0}^x \left(\left(f(t)-\underbrace{f(x_0)}_{\text{konstant bezüglich } t}\right)\cdot dt\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{x-x_0}\cdot\int_{x_0}^x \left(\underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{\leqslant\epsilon}\cdot dt\right)$$

$$\underbrace{\leqslant}_{\text{falls } x\in]x_0,x_0+\delta[}\frac{1}{x-x_0}\cdot\epsilon\cdot(x-x_0)=\epsilon$$

Daraus folgt die Behauptung.
Der Beweis geht analog für $x<x_0$.

Nebenrechnung:

- Aus
  - f ist stetig in x, also
  - $\forall(\epsilon>0):\exists(\delta>0):$
- folgt:
  - $(|t-x_0|\leqslant\delta)\Rightarrow(|f(t)-f(x_0)|\leqslant\epsilon)$

Bemerkung

Für stetige f gilt: Ist f gegeben, so lässt sich durch Integration F ermitteln. Durch die Differentiation von F erhält man wieder f.

Ausblick

Es ist auch Integration unbeschränkter Funktionen über unbeschränkte Intervalle möglich. Das ergibt den Begriff des **uneigentlichen Integrals**. (siehe Literatur)
Die Integration über unbeschränkte Intervalle ist wie folgt definiert:
$\int_a^\infty (f(x)\cdot dx):=\lim_{b\to\infty}\left(\int_a^b (f(x)\cdot dx)\right)$, vorausgesetzt, dass der Limes existiert.

Table of Contents